

# 球面定在波としての電子構造

—微細構造定数を中心として—

An Electron Structure as Spherical Standing Wave  
with Particular Reference to Fine Structure Constant

戸上 良弘

Yoshihiro TOGAMI

## Abstract

電子が球面定在波であると仮定して、その構造について考察した。球面定在波のエネルギー計算から電子の質量を算出し、電子質量の主量子数依存性を示した。

電子の内部構造と微細構造定数の関係を明らかにし、電子の内部構造をイメージ化することを試みた。電子の各種パラメータの計算式を示し、コンプトン波長、電子の古典半径、電子質量など、既存の電子物理定数と有効数字内で一致することを示した。

## キーワード

球面波, 定在波, 共振回路, 微細構造定数, 主量子数, イオン化エネルギー, 電子の古典半径, ボーア半径, スピン, 不確定性原理

## 1. はじめに

電子は点電荷の代表的存在であるが、その構造については不明なところが多い。筆者は点電荷それ自体に、陽性と陰性、粒子性と波動性の複々素的性質をもつ複素点電荷の存在を仮定し、DEEP (Dual Essentialities of Electric Pole) モデルを提案した [1-4]。その DEEP モデルを場 (波動) の理論として扱ったのが球面定在波のモデルである [4-5]。

本論はこれまでの「球面定在波」の考察 [6-9] を踏まえ、電子を球面定在波として捉えたときの、各種パラメータについて考察した。とくに微細構造定数との関係、イオン化エネルギーの計算式、質量の計算式を示した。

## 2. 球面定在波

球面定在波とは球面波であり定在波でもある波のことである。球面定在波は内部自己共振によって自らの存在を規定し、その共振条件によって内径や外径、共振周波数など自らの構造や性

質を規定する性質がある [5-6]. ここでは, 球面定在波の基本的な概念, 共振条件等を示す.

## 2.1 球面定在波の基本波動

基本的な球面定在波の波動関数を式 (1) に示す. ここで  $r$  は中心からの半径,  $k$  は波数,  $t$  は時間変数,  $\omega$  は角周波数である. 波数  $k$  と波長  $\lambda$  との間には  $k=2\pi/\lambda$  の関係があり, 光速  $c$  と波数  $k$  と角周波数  $\omega$  との間には,  $\omega=kc$  の関係がある.  $\epsilon_0$  は真空の誘電率であり,  $q_e$  は電荷の大きさである. とくに本論では電子の波動を考えているので,  $q_e$  は素電荷を表している<sup>1</sup>.  $e^{i(\omega t \mp kr)}$  は電荷に付随する位相項を表す. 位相項を除けば, 式 (1) は大きさ  $q_e$  の電荷によって作られる電位ポテンシャルに他ならない.

$$\varphi(r, t) = \frac{q_e e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1)$$

見方を変えれば, 波動  $\varphi(r, t)$  は複素点電荷  $q_e e^{i\omega t}$  の遅延 (または先進) ポテンシャルによって作られる複素ポテンシャル波動と捉えることができる [4]. ここで, 位相項  $e^{i(\omega t - kr)}$  は等位相面が時間とともに外向きに移動することから外向き (球面に対して垂直上向き) の球面波を表している. 同様に位相項  $e^{i(\omega t + kr)}$  は等位相面が時間とともに内向きに移動することから内向き (球面に対して垂直下向き) の球面波を表している.

指数関数と三角関数の関係から位相項は,  $e^{i(\omega t \mp kr)} = e^{i\omega t} (\cos kr \mp i \sin kr)$  と表現できる. 虚数単位  $i$  は  $i=e^{i\pi/2}$  と表現できるので,  $\sin$  関数の前にかかる虚数係数  $i$  を時間的位相  $\pi/2$  のずれと考えれば, 式 (1) は式 (2) のように表現できる. つまり複素振幅を持つ球面波は, 空間的には定在波と捉えることができる. そこで複素振幅を持つ外向き・内向きの球面波を, それぞれ外向き (上向き) の球面定在波, 内向き (下向き) の球面定在波と呼ぶ.

$$\varphi(r, t) = \frac{q_e e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0 r} \cos kr + \frac{q_e e^{i(\omega t \mp \pi/2)}}{4\pi\epsilon_0 r} \sin kr \quad (2)$$

## 2.2 球面定在波のエネルギーと共振条件

式 (1) の波動は基本的には電位のポテンシャルを表しているなので, そのエネルギー密度は  $\frac{1}{2}\epsilon_0 (-\nabla\varphi)(-\nabla\varphi^*)$  で表される<sup>2</sup>. ポテンシャルの傾きに関しては中心からの半径  $r$  のみに依存するので, エネルギー密度は次式 (3) で表される [6].

1 一般に素電荷は記号  $e$  を使うが, 自然対数の底  $e$  との混同を避けた.

2 文献 [7] では,  $\epsilon_0 (-\frac{1}{2}\nabla\varphi)(-\frac{1}{2}\nabla\varphi^*)$  と考えたが, 総合的に整合性を再検討し文献 [6] の考えに戻した.

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) = \frac{q_e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \left( \frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2} \right) \quad (3)$$

エネルギー密度に半径  $r$  厚さ  $dr$  の球殻の体積要素  $4\pi r^2 dr$  を掛け、内径  $r_{in}$  から外径  $r_{out}$  まで、波動の存在区間  $[r_{in}, r_{out}]$  で定積分してエネルギー求める。

$$\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{q_e^2}{8\pi \varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{out}} \right) + \frac{q_e^2}{8\pi \varepsilon_0} k^2 (r_{out} - r_{in}) \quad (4)$$

式 (4) の右辺第一項は、キャパシタンス  $C=4\pi \varepsilon_0 (1/r_{in}-1/r_{out})^{-1}$  の球形コンデンサーに蓄えられる電気 (静電) エネルギー  $q_e^2/2C$  と等価になる。また、真空の誘電率  $\varepsilon_0$  と真空の透磁率  $\mu_0$  と光速  $c$  の関係式  $\mu_0 \varepsilon_0=1/c^2$  を用いると、式 (4) の右辺第二項は次のように書き直せる。

$$\frac{q_e^2}{8\pi \varepsilon_0} k^2 (r_{out} - r_{in}) = \frac{\mu_0}{8\pi} q_e^2 c^2 k^2 (r_{out} - r_{in}) \quad (5)$$

このエネルギーの式は、インダクタンス  $L=\mu_0 (r_{out}-r_{in})/4\pi$  のコイルに電流  $I=q_e c k$  が流れるときに蓄えられる磁気エネルギー  $LI^2/2$  と等価になる。図 1 に球面定在波と等価な同心球面对の共振回路を示す [2]。もっとも同心球面对共振回路のように球対称の形状では、電流と変位電流が同量逆向きに流れることと、球対称であることから内部にも外部にも磁場は生じない [3]。よって磁気エネルギーと呼ぶことには多少違和感を覚えるので、本論では単に電流エネルギーと呼ぶことにする。

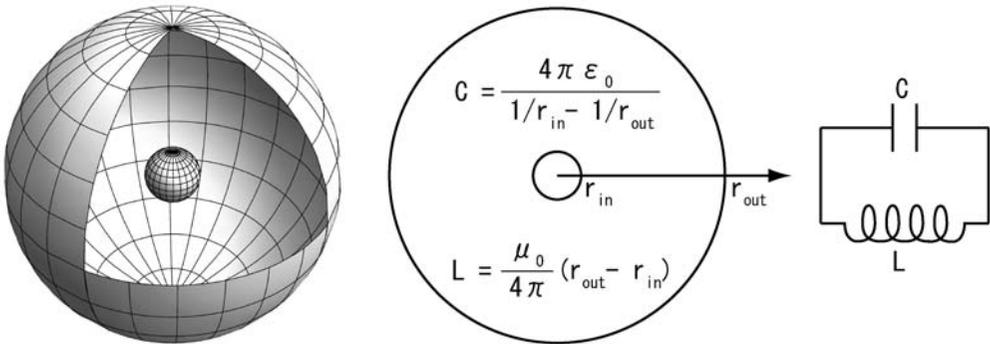


図 1 球面定在波と等価な同心球面对共振回路

Fig. 1 Electric equivalent circuit of spherical standing wave.

球面定在波が安定して存在するためには、式 (4) 右辺第一項の電気エネルギーと式 (4) 右辺第二項の電流エネルギーの大きさが等しく、共振状態にあると考える。共振条件は内径  $r_{in}$  と外径  $r_{out}$  と波数  $k$  を用いて次式 (6) のように表される。

$$k^2 r_{in} r_{out} = 1 \tag{6}$$

### 3. 電子の構造

ここでは球面定在波のエネルギー計算をもとに電子の質量の計算式を導く．また共振条件と波数の関係から，主量子数とイオン化エネルギーの関係式を求める．電子の形状的構造と微細構造定数との関係を明らかにし，電子の内部構造をイメージ化する．

#### 3.1 電子のエネルギーと質量の計算

球面定在波のエネルギー計算式である式 (4) において，内径  $r_{in}$  と外径  $r_{out}$  の間のみ波動が限定して存在する場合を考えた．しかしながら，静電気のような現象の原因として電子の存在を考えたとき，電子の電荷が作り出す電界の存在範囲は，ある程度の空間に広がっていると考えられる．

そこで，球面定在波の外径  $r_{out}$  の外側にも，静電気のような電界が生じている場合を考える．つまり，等位相面が半径方向に移動する波動は外径  $r_{out}$  のところまでであるが，外径  $r_{out}$  より外側には等位相面の移動を伴わない，準静電的な波動が存在する場合である．ただし，共振条件は変わらず，同じ波数  $k$  を持つ場合をここでは想定している．

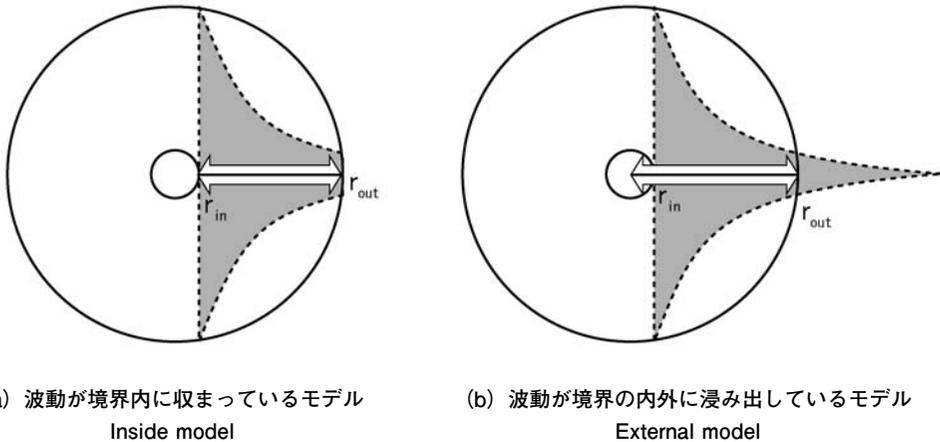


図2 波動の存在範囲

Fig. 2 Existence range of waves.

球面定在波のエネルギーを表す式 (4) は，電気エネルギーと，電流エネルギーの和になっている．電気エネルギーは内径  $r_{in}$  に大きく依存し，外径  $r_{out}$  の影響はわずかである．逆に電流エネルギーは，外径  $r_{out}$  に大きく依存し，内径  $r_{in}$  の影響はわずかである．そこで，図2 (b) のように，

電気エネルギーは、外径  $r_{out}$  の外側にも浸み出し、電流エネルギーは内径  $r_{in}$  の内側にも浸み込んでいる場合を考える。

つまり、各区間におけるエネルギー密度が次式 (7) で表される波動を想定する。

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) = \frac{q_e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \times \begin{cases} \frac{k^2}{r^2} & [0, r_{in}] \\ \frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2} & [r_{in}, r_{out}] \\ \frac{1}{r^4} & [r_{out}, \infty] \end{cases} \quad (7)$$

このようなエネルギー密度を作り出すポテンシャルの候補は、いくつか考えられる。外径  $r_{out}$  の外側のできる電界はエネルギーの観点だけで言えば、電荷  $q_e$  が作り出す静電ポテンシャル  $q_e/4\pi\varepsilon_0 r$  のエネルギーと等価になる。現実的には、 $r$  方向に等位相面の移動を伴わないが、時間的には位相変化する  $q_e e^{i\omega t}/4\pi\varepsilon_0 r$  というポテンシャルが候補として考えられる。

外径  $r_{out}$  の外部に電気エネルギーが生じると、同量で双対な電流エネルギーが内径  $r_{in}$  の内部にも生じると考えられる。式 (8) は式 (7) のエネルギー密度を作り出すポテンシャル関数の候補である。エネルギー密度が同じであれば、エネルギーや質量等の計算値は変わらないので、本論では式 (8) のポテンシャル関数の是非についてこれ以上は踏み込まない。

$$\varphi(r, t) = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} \pm i k e^{i\omega t} \log_e k r & [0, r_{in}] \\ \frac{e^{i(\omega t \mp k r)}}{r} & [r_{in}, r_{out}] \\ \frac{e^{i\omega t}}{r} & [r_{out}, \infty] \end{cases} \quad (8)$$

区間  $[r_{in}, \infty]$  における電気エネルギー  $U_e$  と、区間  $[0, r_{out}]$  における電流エネルギー  $U_i$  はそれぞれ次式 (9) で表される。

$$U_e = \frac{q_e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \int_{r_{in}}^{\infty} \left( \frac{1}{r^4} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{q_e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{in}} \quad (9)$$

$$U_i = \frac{q_e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{r_{out}} \left( \frac{k^2}{r^2} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{q_e^2}{8\pi\varepsilon_0} k^2 r_{out}$$

ところで、素粒子の電磁相互作用における結合定数として微細構造定数というものが知られている。微細構造定数  $\alpha$  は一般に素電荷  $q_e$ 、プランク定数  $h$ 、光速  $c$  などを用いて次式 (10) で表

される.

$$\alpha = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (10)$$

この微細構造定数を用いて式 (9) を整理すると次式 (11) のようになる.

$$\begin{cases} U_e = \frac{\hbar c \alpha}{2} \cdot \frac{1}{r_{in}} \\ U_i = \frac{\hbar c \alpha}{2} k^2 r_{out} \end{cases} \quad (11)$$

この二種類のエネルギーが式 (6) の共振条件  $k^2 r_{in} r_{out} = 1$  を満たすとき, 両者は等しく,  $U_e = U_i$  となる. 全エネルギーは  $U = U_e + U_i$  より, 次式 (12) で表される.

$$U = \hbar c \alpha k^2 r_{out} \quad (12)$$

この全エネルギー  $U$  すべてが角速度  $\omega$  の光に変換されると考えた場合, そのエネルギーは次のように表される.

$$U = \hbar \omega \quad (13)$$

これらの式 (12) と式 (13) および  $\omega = kc$  の関係から,  $\alpha k r_{out} = 1$  が導かれる. さらに式 (6) の共振条件  $k^2 r_{in} r_{out} = 1$  と合わせて次の関係式を導くことができる.

$$\begin{cases} k r_{in} = \alpha \\ k r_{out} = 1/\alpha \end{cases} \quad (14)$$

この式 (14) は, 波数  $k$  によって規格化された内径  $k r_{in}$  と外径  $k r_{out}$  が, それぞれ微細構造定数  $\alpha$  とその逆数  $1/\alpha$  に等しいことを示している. この関係式を用いて式 (11) のエネルギー  $U_e$  と  $U_i$  を書き直すと次のように表される.

$$U_e = U_i = \frac{\hbar k c}{2} \quad (15)$$

ここで全エネルギー  $U$  は  $U_e$  と  $U_i$  の和であるから, 次式で表される.

$$U = \hbar k c \quad (16)$$

もつとも、この式 (16) は、式 (13) の  $\omega$  を  $kc$  に置き換えたものに他ならない。

さらに、エネルギーと質量の等価を示すアインシュタインの関係式から、エネルギーを光速  $c$  の二乗で割り、電子の質量  $m_e$  が求められる。

$$m_e = \frac{\hbar k}{c} \quad (17)$$

この質量は電子の最大静止質量を表している。ここでの静止の意味は、重心（中心を含む全体）が空間的に移動していないという意味であり、相対性理論でいうところの静止質量の意味である。もつとも次節以降では、電子のエネルギーや質量は波動モード（主量子数  $n$ ）によって変化する量であることを示す。

### 3.2 主量子数とイオン化エネルギー

球面定在波の基本パラメータである波数  $k$ 、内径  $r_{in}$ 、外径  $r_{out}$  が遷移によって変化する場合を考える。ただし遷移後の波数  $k'$ 、内径  $r'_{in}$ 、外径  $r'_{out}$  も共振条件  $k'^2 r'_{in} r'_{out} = 1$  を保つものとする。ここで  $n$  を自然数として、波数  $k$  が  $n$  分周される場合、波数は  $k' = k/n$  になる。内径は  $r'_{in} = r_{in}$  のまま変わらない場合、遷移後の外径  $r'_{out}$  は、共振条件により、遷移前の外径  $r_{out}$  を用いて  $r'_{out} = n^2 r_{out}$  と表される [7]。

遷移後の球面定在波の区間  $[r'_{in}, r'_{out}]$ 、すなわち区間  $[r_{in}, n^2 r_{out}]$  における電気エネルギー  $U_e(n)$  と電流エネルギー  $U_i(n)$  はそれぞれ次のようになる。

$$U_e(n) = \frac{q_e^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_{r_{in}}^{n^2 r_{out}} \left(\frac{1}{r^4}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{n^2 r_{out}}\right) \quad (18)$$

$$U_i(n) = \frac{q_e^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_{r_{in}}^{n^2 r_{out}} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 dr = \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} k^2 \left(r_{out} - \frac{r_{in}}{n^2}\right)$$

ここで前節と同じように、外径  $n^2 r_{out}$  の外側にも電気エネルギーが、内径  $r_{in}$  の内側にも電流エネルギーが生じている場合を考えたとき、エネルギーはそれぞれ前節で求めた  $U_e$  と  $U_i$  に等しくなる。そこで外側に電気の衣を被った状態の電気エネルギー  $U_e$  を基準として電気の衣を被っていない主量子数  $n$  状態の電気エネルギー  $U_e(n)$  のエネルギー差を求めると次式 (19) のようになる。

$$U_e(n) - U_e = \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{n^2 r_{out}}\right) - \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{in}} = -\frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{n^2 r_{out}} \quad (19)$$

さらに微細構造定数  $\alpha$  を用いて表すと次式のようになる.

$$U_e(n) - U_e = -\frac{\hbar kc}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{n^2} \quad (20)$$

式 (20) の両辺を素電荷  $q_e$  で割った値は, エネルギー差を電子ボルト単位 [eV] で表現した値となる.  $n=1$  のときの大きさを計算すると次のようになる<sup>3</sup>. この値は, 水素原子の第一イオン化エネルギーの値と等しくなる.

$$\frac{\hbar kc}{2q_e} \alpha^2 \cong 13.6 \text{ [eV]} \quad (21)$$

このイオン化エネルギーを電子ボルト [eV] 単位で, 外径  $r=n^2r_{out}$  を用いて表現したものが次式 (22) である. 右辺のマイナス符号は無限遠まで電気エネルギーの衣をまとった, 最大電気エネルギー  $U_e$  を基準としているためである.

$$\frac{U_e(n) - U_e}{q_e} = -\frac{\hbar kc}{2q_e} \alpha^2 \frac{r_{out}}{r}, \quad r = n^2 r_{out}, (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (22)$$

図3はイオン化エネルギーの外径および主量子数依存性を図示したものである.

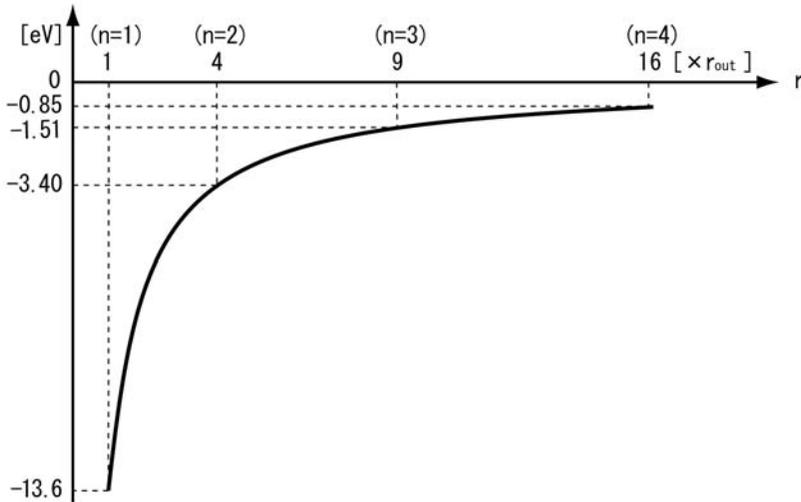


図3 イオン化エネルギーの外径および主量子数依存性

Fig. 3 Ionization energy depends on main quantum number and outside diameter.

3 4章, 表2の波数  $k$  の値を用いて計算している.

### 3.3 主量子数と電子の質量

イオン化エネルギーは外径の外部に生じる電気エネルギーに依存すると考えた。電子の質量を計算するに当たり、電子の全エネルギー変化を考える。主量子数  $n$  状態のエネルギーは電気エネルギー  $U_e(n)$  と電流エネルギー  $U_i(n)$  の和と考えられ、微細構造定数を用いて次式 (23) のように表される。

$$U(n) = U_e(n) + U_i(n) = \hbar kc \left( 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right) \quad (23)$$

さらに、主量子数  $n$  状態における電子の質量は、 $m_e(n) = U(n) / c^2$  より、次式 (24) で表される。

$$m_e(n) = \frac{\hbar k}{c} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right) \quad (24)$$

とくに主量子数  $n=1$  のときは電子の基底状態を表している。このとき電子の質量は最小値となり、微細構造定数  $\alpha$  を用いて、次式 (25) で表される。

$$m_e(1) = \frac{\hbar k}{c} (1 - \alpha^2) \quad (25)$$

### 3.4 微細構造定数との関係

波数  $k$  で規格化した外径  $kr_{out}$  は位相距離を表しており、式 (14) によれば、微細構造定数の逆数  $1/\alpha$  に等しく、その値は約 137 である。この 137 という値は位相で表すと  $43.6\pi = 21.8 \times 2\pi$  であり、半径  $r_{out}$  の距離の間に波の山（または谷）の数が、約 22 個存在するということを表している。つまり、微細構造定数は、素電荷を波源とする球面定在波の最小形状を規定するパラメータと考えられる [6]。

主量子数  $n$  の場合は、 $k=k/n$ 、 $r_{out}=n^2r_{out}$  より、位相距離は  $k'r_{out}=nkr_{out}=n/\alpha$  となる。よって波の山（谷）の数は  $21.8n$  個となる。図 4 に微細構造定数と波数の関係を示す。

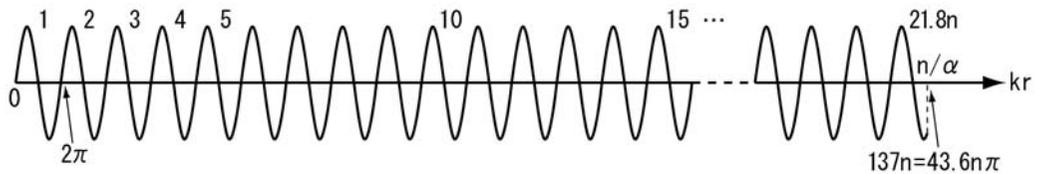


図 4 微細構造定数と波数の関係

Fig. 4 Relationship between fine structure constant and wave number.

波数  $k$  と波長  $\lambda$  との関係は  $k=2\pi/\lambda$  であるから、基底状態 ( $n=1$ ) における内径  $r_{in}$  と波長 ( $\lambda/2\pi$ ) と外径  $r_{out}$  の関係は次のようになる。

$$r_{in} : \frac{\lambda}{2\pi} : r_{out} = \alpha : 1 : \frac{1}{\alpha} \cong \frac{1}{137} : 1 : 137 \quad (26)$$

主量子数  $n$  状態のときは、 $k'=2\pi/\lambda'=k/n$ 、 $r'_{out}=n^2 r_{out}$  より、

$$r_{in} : \frac{\lambda'}{2\pi} : r'_{out} = r_{in} : \frac{n}{k} : n^2 r_{out} = \alpha : n : \frac{n^2}{\alpha} \quad (27)$$

という関係になる。

波動関数の大きさ、すなわち電位ポテンシャルの大きさは、

$$|\varphi(r, t)| = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\hbar k c}{q_e} \alpha \frac{1}{kr} \quad (28)$$

と表せるから、式 (14) の  $kr_{in}=\alpha$ 、 $kr_{out}=1/\alpha$  より、

$$\begin{cases} |\varphi(r_{in}, t)| = \frac{\hbar k c}{q_e} & (5.11 \times 10^5 [\text{V}]) \\ |\varphi(1/k, t)| = \frac{\hbar k c}{q_e} \alpha & (3729 [\text{V}]) \\ |\varphi(r_{out}, t)| = \frac{\hbar k c}{q_e} \alpha^2 & (27.2 [\text{V}]) \end{cases} \quad (29)$$

となる。

かっこ内の数値は概算した計算値である<sup>4</sup>。内径  $r_{in}$  の位置が一番大きく、約 50 万 V である。この数値は素電荷あたりのエネルギーである電子ボルト [eV] 単位で表した電子の質量 0.511 MeV (MeV=10<sup>6</sup>eV) にちょうど対応している。外径  $r_{out}$  の位置が一番小さく、約 27.2 [V] である。この数値は電子のイオン化エネルギー 13.6 [eV] の数値のちょうど 2 倍の値と一致する。

主量子数  $n$  のときは、

$$\begin{cases} |\varphi(r_{in}, t)| = \frac{\hbar k c}{q_e} \\ |\varphi(n/k, t)| = \frac{\hbar k c}{q_e} \cdot \frac{\alpha}{n} \\ |\varphi(n^2 r_{out}, t)| = \frac{\hbar k c}{q_e} \cdot \frac{\alpha^2}{n^2} \end{cases} \quad (30)$$

4 4 章、表 2 の波数  $k$  の値を用いて計算している。

と表される。外径が  $n$  の 2 乗に比例して広がる分、外径の位置での電位は  $n$  の 2 乗に反比例して小さくなる。

図 5 は基底状態（主量子数  $n=1$ ）のときの内径と外径、およびポテンシャルの大きさと、微細構造定数との関係を図示したものである。ただし図示の都合上、微細構造定数  $\alpha$  の大きさを誇張して描いているので注意してほしい。

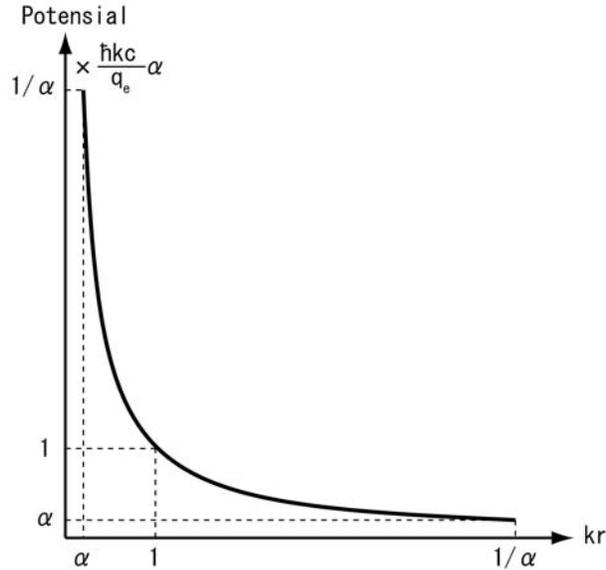


図 5 微細構造定数と内径、外径、およびポテンシャルとの関係

Fig. 5 Relationship between fine structure constant, inside diameter, outside diameter, and potential.

球面定在波の波動関数を表す式 (2) は微細構造定数を用いて整理すると式 (31) のように表現できる。

$$\varphi(r, t) = \frac{\hbar kc}{q_e} \alpha \left( e^{i\omega t} \cdot \frac{\cos kr}{kr} + e^{i(\omega t \mp \pi/2)} \cdot \frac{\sin kr}{kr} \right) \quad (31)$$

図 6 はこの式 (31) が表すポテンシャルを表したものであり、基底状態（主量子数  $n = 1$ ）を表している。図 6 (a) は時間的位相  $\omega t = 0$  のときであり、実線が  $(\cos kr)/kr$  の波形を示している。参考のため点線で  $\pm 1/kr$ 、一点鎖線で  $\cos kr$  の形も示している。図 6 (b) は時間的位相が 90 度ずれている場合であり、 $\omega t = \pi/2$ （外向きの球面定在波）または、 $\omega t = -\pi/2$ （内向きの球面定在波）の状態を示している。実線が  $(\sin kr)/kr$  の波形を示している。同じく参考のため、点線で  $\pm 1/kr$ 、一点鎖線で  $\sin kr$  の形も示している。



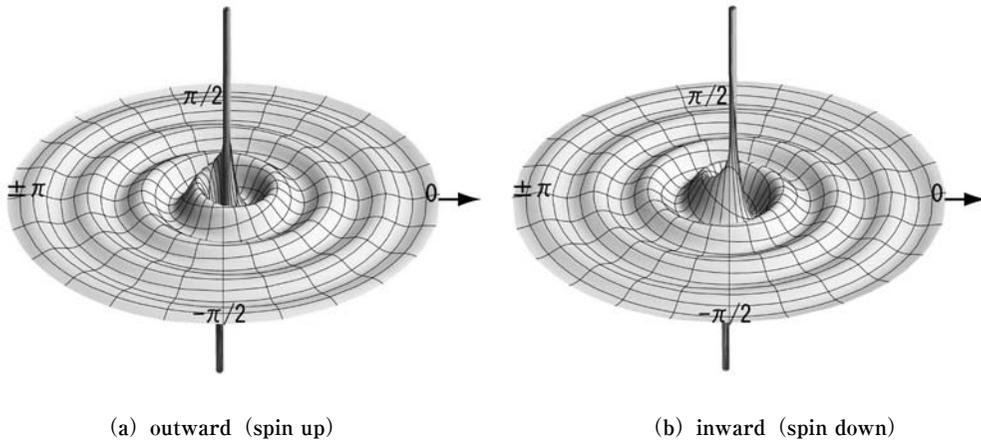


図 8 位相空間における電子のポテンシャルイメージ  
 Fig. 8 Potential image of an electron in phase space.

の方向は、図の中心から奥の方向に取り、ポテンシャルは高さ方向に取って表現している。

図 8 (a) は外向き (上向き) の球面定在波による電子のイメージを表している。実軸上から波の山 (尾根) に沿って位相が増える方向 (反時計回り) に一回りして実軸上に戻ると、実軸上の正の方向 (図で右方向) にひと山 ( $2\pi$ ) 位相がずれるのが分かる。逆の見方もできる。このポテンシャルをコマとみなし、コマを時計回りに回転させたとき、実軸上に現れるのが実空間に展開されるポテンシャルである。時間とともに (回転とともに) 実軸上に現れるポテンシャルは半径  $r$  の正の方向 (外側) に山 (位相) が移動する様子がイメージできるであろう。同様に図 8 (b) は内向き (下向き) の球面定在波による電子のイメージである。時間とともに実軸上のポテンシャルの山は内側に移動するのが分かる。

図 8 (a), (b) で表される二つの波動モードは、上向き・下向きという二つの状態しか取らない電子のスピンに相当する概念と一致することが分かる。

#### 4. 電子の物理定数計算値

表 1 に、微細構造定数  $\alpha$ 、光速  $c$ 、プランク定数  $h = h/2\pi$ 、素電荷  $q_e$  の値を示す [10]。これらの基本定数を用いて、電子物理定数の計算式と、その計算値を表 2 に示す。

物理定数の計算では、何を基本定数と考え、何を基本パラメータ (変数) と考えるかは重要である。一般に未知のパラメータは少ないほど良く、より少ないパラメータでより多くのことを表現できるのが良い理論と言える。表 2 は一つの物理定数を三種類の表現方法で示した。便宜上、「波数表現」、「内外径表現」、「質量表現」としている。

「波数表現」では、波数  $k$  を基本パラメータとして表現したものである。本論では波数  $k$  を球面定在波 (電子) の内部の状態を表すもっとも基本的なパラメータであると考えている。表 1 の基

表 1 基本物理定数  
Table. 1 Fundamental physical constants.

名称と記号	数値 [単位]
微細構造定数 $\alpha$	0.0072973525376 (50)
微細構造定数の逆数 $1/\alpha$	137.035999679 (94)
光速 $c$ (定義値)	$2.99792458 \times 10^8$ [m/s]
プランク定数 $\hbar = h/2\pi$	$1.054571628 (53) \times 10^{-34}$ [J · s]
素電荷 $q_e$ (一般には記号 $e$ )	$1.602176487 (40) \times 10^{-19}$ [C]

※ ( ) 内の 2 桁の数字は、表示されている最後の 2 桁についての標準不確かさを表す。

表 2 電子の基本物理定数と計算値  
Table. 2 Fundamental physical constants of an electron and their calculated value.

名称と記号	波数表現	内外径表現	質量表現	計算値	比較値[10]
外径 $r_{out}$	$1/\alpha k$	$r_{in}/\alpha^2$	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e q_e^2}$	→	ボーア半径 5.2917720859(36) $\times 10^{-11}$ [m]
内径 $r_{in}$	$\alpha/k$	$\alpha^2 r_{out}$	$\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$	2.8179402894 $\times 10^{-15}$ [m]	電子の古典半径 2.8179402894(58) $\times 10^{-15}$ [m]
波数 $k$	$k$	$\frac{1}{\sqrt{r_{in}r_{out}}}$	$\frac{m_e c}{\hbar}$	2.5896050974 $\times 10^{12}$ [1/m]	
波長 $\lambda$	$2\pi/k$	$2\pi\sqrt{r_{in}r_{out}}$	$\frac{2\pi\hbar}{m_e c}$	2.4263102175 $\times 10^{-12}$ [m]	電子のコンプトン 波長 2.4263102175(33) $\times 10^{-12}$ [m]
周波数 $f$	$\frac{kc}{2\pi}$	$\frac{c}{2\pi\sqrt{r_{in}r_{out}}}$	$\frac{m_e c^2}{2\pi\hbar}$	1.2355899746 $\times 10^{20}$ [Hz]	
全エネルギー $U$	$\hbar kc$	$\hbar c\alpha \frac{1}{r_{in}}$	$m_e c^2$	8.1871043759 $\times 10^{-14}$ [J]	
エネルギー $U(1)$ ( $n=1$ 最小値)	$\hbar kc(1-\alpha^2)$	$\hbar c\alpha \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{out}}\right)$		8.1866684015 $\times 10^{-14}$ [J]	
静止質量 $m_e$ (最大値)	$\frac{\hbar k}{c}$	$\frac{\hbar\alpha}{c} \cdot \frac{1}{r_{in}}$	$m_e$	9.1093821428 $\times 10^{-31}$ [kg]	9.10938215(45) $\times 10^{-31}$ [kg]
静止質量 $m_e(1)$ ( $n=1$ 最小値)	$\frac{\hbar k}{c}(1-\alpha^2)$	$\frac{\hbar\alpha}{c} \left(\frac{1}{r_{in}} - \frac{1}{r_{out}}\right)$		9.1088970558 $\times 10^{-31}$ [kg]	

※比較値 ( ) 内の 2 桁の数字は、表示されている最後の 2 桁についての標準不確かさを表す。

本物理定数と波数  $k$  を用いて、質量をはじめとし、電子のあらゆる基本的物理定数が全て計算によって求められることを示している。

「内外径表現」では、内径  $r_{in}$  または外径  $r_{out}$  を基本パラメータとして表現したものである。球面定在波では、共振条件  $k^2 r_{in} r_{out} = 1$  によって、3つのパラメータは密接に関係しているので、波数  $k$  が直接分らない場合は内外径から計算できる。

「質量表現」とは、いわゆる既存の物理表現のことである。電子の質量がパラメータとして計算式に含まれているのが特徴である。エネルギーを光速の二乗で割ったものが質量であり、エネルギーと質量は等価である。しかしながら状態によってエネルギーが変化するため、わずかではあるが、質量も状態によって変化する値である。どの状態の質量なのか明確にしないかぎり、基本的なパラメータの第一候補には相応しくないと筆者は考える。

計算値を求めるにあたり、波数  $k$ 、内径  $r_{in}$ 、外径  $r_{out}$  のうちの一つは測定等、計算以外の他の方法で求める必要がある。ここでは、外径  $r_{out}$  にボーア半径の値を当てはめ、他の物理定数を計算した。比較値として理科年表 [10] に記載されている電子の古典半径、電子のコンプトン波長、電子の質量を併記している。それぞれ対応関係にある、内径  $r_{in}$  と電子の古典半径、波長  $\lambda$  と電子のコンプトン波長は、それぞれ有効数字 11 桁の範囲で完全に一致した。

質量は、どのエネルギー状態の質量であるか明確にする必要がある。ここでは電気の衣を被った（裸ではない）電子の最大静止質量と比較した。ここでの静止の意味は空間に対して移動していないという意味で、相対性理論でいうところの静止質量のことを意味していることはすでに述べた通りである。計算によって求めた質量 11 桁の計算値は、比較値である既存の電子の質量 9 桁（下 2 桁に標準不確かさを含む）の値と、誤差の範囲内で一致した<sup>5</sup>。

## 5. おわりに

電子は球面定在波であるという仮定のもとに、エネルギーや質量など、各種パラメータを計算したところ、既存の物理量と良い一致が見られた。電子のスピンという概念は、外向き（上向き）と内向き（下向き）の 2 種類の球面定在波の概念と一致する。

電子を質点（粒子）として扱うべきか、場（波動）として扱うべきか、どちらが本質かというのは議論の余地がある [11]。電子は「粒子でもあり波動でもある」、というのが物理学の教科書的な考え方である。本論の考え方はこうである、「電子は波動である。ただし中心が存在する」。

本論においても、中心、すなわち重心の位置と運動量という概念は存在する。これは電子質量  $m_e$  の質点の位置と運動量としてマクロな力学に従う。しかし、電子の内部構造は波動である。その波動を粒子と捉え、位置と運動量の概念を持ち出すと、位置と運動量を同時に測定できないという不確定性原理が顔を出す。しかし、不確定性原理は、本来波動（場）であるものを粒子（質

5 文献 [6] における電子質量計算では有効数字 4 桁の範囲内での一致であった。

点)として捉えることの限界を表すものと考えるのがよい [11]. 電子の内部波動における位置と運動量は、しいて言えば、電位ポテンシャルと、波数  $k$  に関する電流成分である. エネルギーでいえば、電気エネルギーと電流エネルギーである. 両者は時間的位相が 90 度ずれているので、確かにその意味では同時には現れない<sup>6</sup>. 時間的位相一回転当たりのエネルギー(つまり最小単位時間とエネルギーとの積)は、 $U_e/\omega = U_i/\omega = \hbar/2$  であり、これは不確定性原理で測定限界とされている量を示している.

## 謝辞

電気の基礎を大阪大学基礎工学部電気工学科(現在は電子物理科学科)において学ぶことができたことに感謝する. 人間の認知能力について同大学大学院言語文化研究科で考察することができたことに感謝する. 本論文をまとめる場を与えて下さった帝塚山学院大学人間科学部に感謝する. 論文をまとめるにあたり内助を惜しまなかった家族に感謝する.

## 参考文献

- [ 1 ] 戸上良弘, 「点電荷の複素ポテンシャル表現とその意味について」, 帝塚山学院短期大学 研究年報 45, pp.95-110, 1997.
- [ 2 ] 戸上良弘, 「同心球面対における共振回路」, 帝塚山学院短期大学 研究年報 46, pp.62-74, 1998.
- [ 3 ] 戸上良弘, 「球対称の電気振動場と複素点電荷」, 帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 創刊号, pp.71-79, 1999.
- [ 4 ] 戸上良弘, 「複素点電荷による新しい原子モデルの提案」, 帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 5 号, pp.40-52, 2003.
- [ 5 ] 戸上良弘, 「球面定在波の生成と自己共振に関する考察」, 帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 6 号, pp.39-51, 2004.
- [ 6 ] 戸上良弘, 「球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察」, 帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 7 号, pp.143-152, 2005.
- [ 7 ] 戸上良弘, 「球面定在波のエネルギー遷移に関する考察」, 帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 8 号, pp.121-129, 2006.
- [ 8 ] 戸上良弘, 「球面定在波の波動関数と量子数に関する考察」, 帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 9 号, pp.123-133, 2007.
- [ 9 ] 戸上良弘, 「球面鏡像の球面定在波による質量獲得のしくみ」, 帝塚山学院大学・人間科学部 研究年報 第 11 号, pp.69-78, 2009.
- [10] 国立天文台編, 「理科年表 平成 23 年 第 84 冊」, 丸善株式会社, 2010.
- [11] 宮沢弘成, 「電子は質点か場か」, 日本物理学会誌 55, p.211, 2000.  
<http://www7.ocn.ne.jp/~miyazaw1/papers/quantum.pdf>

(2011 年 9 月 28 日受付)

---

6 もっともエネルギー密度の計算において、複素共役との積をとるところで、すでに時間平均化してしまっている.