

複素振幅をもつ球面波の Maxwell 方程式

Maxwell Equation of Spherical Wave with Complex Amplitude

戸上 良弘

Yoshihiro TOGAMI

Abstract

複素振幅をもつ球面波に関して、マクスウェル (Maxwell) 方程式との関係を考察した。電気的な球面波としてのスカラーポテンシャルが与えられたとき、対応するベクトルポテンシャルや電場を表す式を示した。球面波における電流密度や変位電流密度を表す式を導き、両者が同量逆向きになることを示した。電場やベクトルポテンシャルは、波の進行方向に振動する縦波となっていることを明らかにした。

キーワード

球面波, マクスウェル方程式, スカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャル, 縦波

1. はじめに

自然界において、球という形状はもっとも基本的な形である。それゆえ球面波は平面波と同等か、それ以上に基本的な波動であると言えよう。しかしながら、平面波としての電磁波に比べて球面波におけるそれは、十分な考察がなされているとは言えない。その理由として、球状（極座標）でのベクトル計算が平面のそれよりも煩雑になること、特異点となる中心の扱い方が難しいこと、波源の存在が物理的実在と結び付けて想定しにくいこと、などが挙げられる。

一般的な電気回路の解析において、電位や電流をフェーザ表示と呼ばれる複素数で扱うことがある。それは電位と電流の大きさと位相を合わせて扱う便利な道具として複素数を用いている。一方、量子力学などでは波動の振幅が本質的に複素数になることが知られている。本論で球面波の振幅を複素数で表す表向きの理由は、式の対称性を高くすることで見通しを良くするためである。しかしながら球面波における複素振幅は、むしろ方程式や自然の方が要求している要素のように感じられる。

2. Maxwell 方程式のポテンシャル表現

電磁気学の基本となっている Maxwell 方程式は、一般に次の 4 つの式で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

式 (1) は、クーロン (Coulomb) の法則とも呼ばれる。 ρ は電荷密度を表し、 ε_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数である。式 (2) は、磁荷が存在しないことを表す式である。式 (3) はファラデー (Faraday) の法則とも呼ばれ、磁界の変化と電界の回転との関係を表すものである。式 (4) は変位電流の存在を含めたアンペール (Ampere) の法則を表しており、電流や変位電流の存在と磁界の回転と関係を表している。これら 4 式は、電場 E と磁場 B を基本物理量としてその関係を表した式であり、 EB 対応の表現と言われている。磁場が磁極ではなく電流に由来するという立場の表現方法であり、現在主流の表現方法である [1]。

電場 E と磁場 B は、観測される物理量であるため、実験や観測データから値を求める場合には便利である。一方、量子力学などではポテンシャル(スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル)の方がより基本的な物理量であると考えられている。本論の球面波の場合も、先にスカラーポテンシャル ϕ の式を与え、そこから電場 E やベクトルポテンシャル A を導くことになる。そこで、Maxwell 方程式の 4 式を変形し、本論の球面波で適応しやすい形にしておく [2], [3]。

数学的なベクトル場の定理、「発散がゼロになるようなベクトル場は、別のベクトル場の回転で書ける」ことを使い、式 (2) を変形する。すなわち、磁場 B 発散がゼロであるので、磁場 B は、あるベクトルポテンシャル A を用い、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5)$$

のように、 A の回転で表すことができる。これを式 (3) に代入し、

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6)$$

が得られる。ここで、数学的なベクトル場のもう一つの定理、「回転がゼロになるようなベクトル場は、スカラー場の勾配で書ける」ことを利用する。すなわち、あるスカラーポテンシャル関数 ϕ を用いて、

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (7)$$

とおける.

次に電流と変位電流の関係について, 式 (4) の両辺の発散をとる.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (8)$$

数学的にベクトル場の回転の発散は恒等的にゼロであることから, 式 (8) の左辺は 0 となり,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (9)$$

が得られる. これは電流における連続の方程式の基となる関係を表している. 以上をまとめると, 次の表 1 のようになる.

表 1 球面波向けに変形した Maxwell 方程式

	球面波で使う式	基になる Maxwell 方程式
ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$	$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
スカラーポテンシャル ϕ	$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
電流と変位電流の関係	$\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

3. 球面波の電氣的性質

3.1 球面波のスカラーポテンシャル

点電荷 q_0 が作るスカラーポテンシャルは, 静電場における電位 V のことである.

$$V = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (10)$$

静電場 $\mathbf{E}$ は, r 方向の成分のみをもち, $\mathbf{E} = -dV/dr$ より,

$$\mathbf{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (11)$$

となる. ここで, $\mathbf{u}_r$ は r 方向単位ベクトルである.

電荷 q_0 が時間的に変化するとき, 複素振幅をもつ球面波は, 次の式で表すことができる [4].

$$\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (12)$$

この式は, 球面波に関する波動方程式,

$$\nabla^2(r\phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi) = 0 \quad (13)$$

を満たすことから球面波の式を表していることは明らかである.

位相項 $e^{i(\omega t - kr)}$ は外向きの球面波であり，時間的に変化する電荷 $q_0 e^{i\omega t}$ の遅延ポテンシャルと捉えることができる．同様に位相項 $e^{i(\omega t + kr)}$ は内向きの球面波である．一般に内向き球面波は考えにくいことから，外向きの球面波のみを物理的実在と考え，内向きの球面波を扱わないことが多い．本論ではどちらも対等に扱い，位相項 $e^{i(\omega t \mp kr)}$ として，複号同順として計算する．

式 (12) は位相項を除けば，静電場におけるスカラーポテンシャルの式 (10) と同じであることから，球面波のスカラーポテンシャルとして扱うことにする．

3.2 球面波のベクトルポテンシャル

スカラーポテンシャル ϕ の勾配を計算する．球の対称性から r 方向の単位ベクトルを $\mathbf{u}_r$ として，

$$-\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{u}_r = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u}_r \pm ik \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r \quad (14)$$

となる．これが，式 (7) が示すように，電界 E とベクトルポテンシャルの A の時間変化の和に等しい．

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A は，式 (5) と式 (7) を満たす範囲内で，両者の定め方には自由度がある．そこで電場 E を，位相項 $e^{i(\omega t \mp kr)}$ を除いて，電荷 q_0 が作る静電場の式 (11) と等しくなるように，

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u}_r \quad (15)$$

と定義する．その上で，式 (7) を満たすようにベクトルポテンシャル A を定める．

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} = \pm ik \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r \quad (16)$$

より，

$$\mathbf{A} = \pm \frac{k}{\omega} \cdot \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r \quad (17)$$

となる．ただし積分定数にともなう時間依存しない直流成分は省略した．さらに $\omega = kc$ ， $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ より，

$$\mathbf{A} = \pm \mu_0 c \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r}\mathbf{u}_r \quad (18)$$

と表すこともできる．

磁場 B は式 (5) のようにベクトル A の回転で表される．ベクトルポテンシャル A は半径 r 方向の放射成分しか持たないことから，その回転はゼロである．よって磁場 B は，

$$\mathbf{B} = 0 \quad (19)$$

となる。

3.3 球面波の電流密度

電界 E の発散を計算する。電界 E は半径 r 方向の成分しかもたないから、それを E_r とすれば、

$$E_r = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (20)$$

と表される。極座標におけるベクトルの発散公式から、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \mp ik \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (21)$$

と計算できる。よって、式 (9) より、電流密度の発散は、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mp k\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} \quad (22)$$

となる。空間的な粗密を表す波数 k に比例し、かつ時間的な粗密を表す角周波数 ω に比例することになる。

電流密度 J は、球の対称性から考えても半径 r 方向の成分しかもたない。それを J_r とすれば、極座標におけるベクトル公式により次の式が成り立つ。

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) \quad (23)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) &= r^2 (\nabla \cdot \mathbf{J}) = \mp k\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi} \\ r^2 J_r &= \mp \int k\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi} dr \\ J_r &= -i\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} + \frac{C_0}{r^2} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。なお、 C_0 は積分定数であり、原点に流れ込む(原点から流れ出す)直流成分を表している。定常状態では $C_0 = 0$ と考えてよい。また r 方向の単位ベクトル $\mathbf{u}_r$ を用いて、電流密度ベクトルは、

$$\mathbf{J} = -i\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \quad (25)$$

となる。

ところで、電界の時間変化である変位電流(密度)は、

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} = i\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \quad (26)$$

であるから、電流密度と変位電流密度の関係は、

$$\mathbf{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (27)$$

となる。これは電流と変位電流が同量逆向きであり、中心に向かう流れと中心から放射される流れが同量あることを示している [5]。

3.4 球面波における Maxwell 方程式の解

表 2 に複素振幅をもつ球面波における Maxwell 方程式の解を示す。±などの複号は同順であり、上段の符号は外向きの球面波を、下段の符号は内向きの球面波を示している。 $\mathbf{u}_r$ は半径 r 方向の単位ベクトルである。スカラーポテンシャル ϕ を基にした「 ϕ による表現」も併記しているが、ここでの虚数単位 i は ϕ に対して時間的な位相が 90 度ずれているという意味で捉えることができる。

表 2 複素振幅をもつ球面波の Maxwell 方程式解

名称	式表現	ϕ による表現	対応する Maxwell 方程式
スカラーポテンシャル ϕ	$\phi = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi \varepsilon_0 r}$	ϕ	$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$
ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$	$\mathbf{A} = \pm \frac{k}{\omega} \cdot \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi \varepsilon_0 r} \mathbf{u}_r$ $\mathbf{A} = \pm \mu_0 c \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r} \mathbf{u}_r$	$\mathbf{A} = \pm \frac{k}{\omega} \phi \mathbf{u}_r$ $\mathbf{A} = \pm \frac{1}{c} \phi \mathbf{u}_r$	
電場 $\mathbf{E}$	$\mathbf{E} = \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$	$\mathbf{E} = \frac{1}{r} \phi \mathbf{u}_r$	
磁場 $\mathbf{B}$	$\mathbf{B} = 0$		$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
電場の発散	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mp ik \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mp ik \frac{\phi}{r}$	$\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$
電流密度の発散	$\nabla \cdot \mathbf{J} = \mp k\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2}$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = \mp k\omega \varepsilon_0 \frac{\phi}{r}$	
電流密度 $\mathbf{J}$	$\mathbf{J} = -i\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$	$\mathbf{J} = -i\omega \varepsilon_0 \frac{\phi}{r} \mathbf{u}_r$	
変位電流密度	$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \frac{q_0 e^{i(\omega t \mp kr)}}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$	$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ $= i\omega \varepsilon_0 \frac{\phi}{r} \mathbf{u}_r$	

4. まとめ

「電磁波は横波である」、あるいは「横波の電磁波しか存在しない」というのは、電気工学者の間では常識になっている。確かに平面波や電気双極子の場合、電場や磁場は電磁波の進行方向に対して垂直方向を向くため、横波と言える。しかしながら、球面波における電場 E は、半径方向に振動している。つまり進行方向に対して平行に振動するので、縦波であると言える。磁場 B は 0 であるが、その代わりベクトルポテンシャル A が活躍し、電場 E と同様に縦波になっている。

「電磁波は横波である」という常識は、裏を返せば過去の電磁気学の歴史の中で横波の電磁波しか扱ってこなかったということである。縦波の電磁波は、横波の電磁波と同等か、それ以上の応用範囲が広がっているのではないかと筆者は考える。

謝辞

電気の基礎を大阪大学基礎工学部電気工学科（現在は電子物理科学科）において学ぶことができたことに感謝する。人間の認知能力について同大学大学院言語文化研究科で考察することができたことに感謝する。本論文をまとめる場を与えて下さった帝塚山学院大学人間科学部に感謝する。論文をまとめるにあたり内助を惜しまなかった家族に感謝する。

参考文献

- [1] 細野敏夫, 「メタ電磁気学」, 森北出版, 1999.
- [2] 岡部洋一, 「電磁気学の意味と考え方」, 講談社サイエンティフィック, 2008.
- [3] 前野昌弘, 「よくわかる電磁気学」, 東京図書, 2010.
- [4] 戸上良弘, 「球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察」, 帝塚山学院大学 人間文化学部 研究年報 第 7 号, pp.143–152, 2005.
- [5] 戸上良弘, 「球対称の電気振動場と複素点電荷」, 帝塚山学院大学 人間文化学部 研究年報 創刊号 pp.71–79, 1999.

付録

ベクトル公式

f をスカラー関数とし, F をベクトル関数とする.

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

極座標におけるベクトル公式

極座標における単位ベクトルを, u_r , u_θ , u_ϕ とし, ベクトル F は極座標系の成分表示で,

$$\mathbf{F} = (F_r, F_\theta, F_\varphi) = F_r \mathbf{u}_r + F_\theta \mathbf{u}_\theta + F_\varphi \mathbf{u}_\varphi$$

と表されるものとする.

関数 f の勾配

$$\nabla f = \mathbf{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

ベクトル F の発散

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$$

ベクトル F の回転

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \mathbf{u}_r \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta) \right\} \right] \\ & + \mathbf{u}_\theta \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \\ & + \mathbf{u}_\varphi \left[\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} F_r \right\} \right] \end{aligned}$$

関数 f のラプラシアン

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$