

球面定在波の生成と自己共振に関する考察

Formation and self-resonance of spherical standing waves

戸 上 良 弘

Yoshihiro Togami

Abstract

First, the process where the spherical standing wave is formed from the hypothetical space of zero potential was considered. Next, self resonant frequency and internal energy of the spherical standing wave were calculated. Internal energy of the spherical standing wave is total of Coulomb potential energy and kinetic energy of wave motion. Geometric structure of the spherical standing wave is decided by internal energy and resonance frequency. Wave source of the spherical standing wave dose the both function of voltage source and current source, that is probably observed as an electric charge.

キーワード：球面波、定在波、共振、複素スカラーポテンシャル

1. はじめに

ミクロの世界では、絶えず物質の生成と消滅が繰り返されていると考えられている。また宇宙はビッグバンによってできたという説が現在一般的であるが、ビッグバン以前はどうなっていたのであろうか。時間も空間もなかったとのことで、思考の対象外ということであらうか。

ビッグバンであれ、真空から物質が生成される過程であれ、無から有が生じたように思われている現象において、無とはどのような状態をいうのであろうか。真空というのは、どのような空間なのであろうか。ビッグバン以前にはどのような準備があったのであろうか。本論文の考察の動機はそこにあり、有が生じる以前の状態を考察するところから始まる。

2. 無から有を生み出す式

ミクロの世界では、無から有が生み出されるような現象が起こっているように思われている。そのような現象を定式化することができるのであろうか。この節の考察は、筆者自身の思考実験による、ひとつの結果である。つまり（思考）実験のデータのひとつに過ぎないことをお断りして

おく。

$$1-1=0 \quad (1a)$$

式 (1a) は左辺の計算結果がゼロであることを示す式であり、計算結果である右辺は一通りに定まる。結果が正しいことのみが求められ、通常、なぜそうなるかを問われることはない。

$$0=1-1 \quad (1b)$$

一方、式 (1b) は、ゼロに等しくなる式の 하나가、 $1-1$ であることを示している。右辺に表現される式は $2-2$ でも、 $x-x$ でも成り立ち、何通りも考えられる。あらゆる可能性のうちの一つを選択して示したことになる。無数にある可能な式の中から、一つを選択したのであるから、それが正しい（単に成り立つ）ということよりも、なぜその式を選んだのか、というその意味や理由、解釈の方を問われることになる。なお、意味や解釈も一通りとは限らないが、より良い解釈を求めることはできると考えられる。

$$0=1+e^{i\pi} \quad (2)$$

式 (1b) は一次元の数直線上で考察される式であるが、同じ意味の式を複素平面上で考察し、表現したものが、式 (2) である。結果はたまたま数直線上に乗っているが、思考の範囲は二次元である。式 (1b) の左辺の 0 と式 (2) の左辺の 0 は、同じゼロでも次元が異なると考えたほうがよい。式 (2) の左辺の意味は、数値 1 に対して、位相が 180 度異なる数値（スカラー） $e^{i\pi}$ の和を表している。

$$0=e^{i\omega t}+e^{i(\omega t+\pi)} \quad (3)$$

式 (3) は、 ω や t の値にかかわらず、恒等的に成り立つ式である。左辺の意味、あるいは解釈の一つは、位相が 180 度異なる振動の和を示している。つまり、同種逆位相の波動は互いに打ち消しあって平衡状態にあることを示している。この状態はまだ、位置とか方向とかの概念はない。全体が同位相に、またその逆位相に振動している状態を表している。左辺のゼロは平衡状態にあるという意味をもち、静止しているという意味ではない。

$$0=\frac{e^{i\omega t}}{r}+\frac{e^{i(\omega t+\pi)}}{r} \quad (4)$$

式 (4) は、式 (3) に対して位置の概念が加わった状態である。正負逆位相の点電荷が重なっている状態と解釈できる。もっとも、 $r=0$ のときをどのように解釈するのかという問題を抱えている。

$$0 = \frac{e^{i\omega t}}{r} u_r(a) + \frac{e^{i(\omega t + \pi)}}{r} u_r(a) \quad (5)$$

式 (5) は、式 (4) で、問題になりそうな部分を除外した式である。 $u_r(a)$ は、図 1 (a) のような性質をもつ単位ステップ関数である。電気回路の教科書 [1] などに出てくるものは、通常時間 t に関する単位ステップ関数が使われるが、ここでは、球の半径 r に対して単位ステップ関数を導入した。単位ステップ関数 $u_r(a)$ により、半径 a の球殻の内部はポテンシャルが存在せず、半径 a の球殻の外側でのみ何らかのポテンシャルが存在する状態を表現することが可能になる。

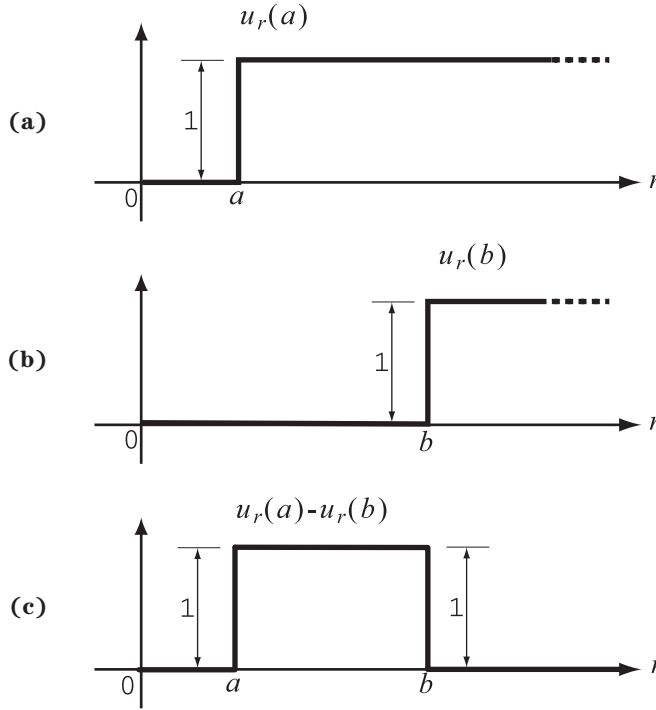


図 1 空間における単位ステップ関数

Fig. 1. Unit function of space

$$0 = \frac{e^{i\omega t}}{r} u_r(a) \exp\{-ik(r-a)\} + \frac{e^{i(\omega t + \pi)}}{r} u_r(a) \exp\{-ik(r-a)\} \quad (6)$$

式 (6) 右辺第一項は、半径 a の球殻を起点として、外側に広がる球面波を表している。式 (6) 右辺第二項は、第一項と同種逆位相の外向き球面波を表している。左辺のゼロは、右辺の二つの球面波が互いに打ち消しあって平衡状態にあることを表している。例えば、物質と反物質が重なって存在していてまだ未分化の状態とイメージすることもできるであろう。

式 (6) には、時間を表す変数 t 、振動の角周波数を表す変数 ω 、空間の位置や広がりを表す r 、

波数を表す変数 k 、波動が存在し得る最小半径であり、外向き球面波の起点を表す未知数 a 、これらの変数や未知数が含まれている。しかし、変数や未知数の値によらず、恒等的に成り立つ等式であることを改めて強調しておく。

もし真空というものが式 (6) で表されるような状態であると仮定したらどうであろうか。右辺を見ると、あらゆる可能性を秘めた、文字通り潜在的ポテンシャルの充満した状態と見る事ができる。左辺のゼロは、何もない状態を表すゼロではなく、あらゆる状態ベクトルの和がゼロの平衡状態にあることを表している。

その平衡状態は何によって保たれているかといえば、二つの外向き球面波の波源が、半径 a の球殻にぴったり重なっていることによってかろうじて保たれている。実際には重なりつつも、たえず揺らいでは戻り、揺らいでは戻っている状態であろう。次節では、その揺らぎが、どの程度に達したとき、平衡状態が破られるかを考察する。

3. 球面波の生成

式 (7) 右辺は、式 (6) の第一項である。半径 a の球殻の外側で定義される外向きの球面波を表している。半径 a の球殻の内側においては、波動が存在せずポテンシャルはゼロである。

$$\varphi(r, t) = \frac{e^{i\omega t}}{r} u_r(a) \exp\{-ik(r-a)\} \quad (7)$$

もう少し分解して解釈すると、 $1/r$ は球面波と平面波を区別する空間的な傾きを表す。球面波は三次元的な広がりをもつ波動であるが、半径 r のみに依存する球対称な波動であるため、空間の次元は一次元で代表される。実際、球面波の波動に r をかけた $r\varphi(r, t)$ という波動は、 r 方向の平面波として考えることができる。

空間的揺らぎにより、式 (6) 右辺第二項の波動の起点が、半径 a から半径 b の位置 ($0 \leq a \leq b$) にずれたとき、その様子を表したのが式 (8a) である。

$$\varphi(r, t) = \frac{e^{i\omega t}}{r} u_r(a) \exp\{-ik(r-a)\} + \frac{e^{i(\omega t + \pi)}}{r} u_r(b) \exp\{-ik(r-a)\} \quad (8a)$$

式 (8a) を整理すると、式 (8b) のように表される。

$$\varphi(r, t) = \frac{e^{i\omega t}}{r} \exp\{-ik(r-a)\} [u_r(a) - u_r(b)] \quad (8b)$$

式 (8b) の $[u_r(a) - u_r(b)]$ は、図 1 (c) のように $[a, b]$ の区間のみ 1 となる単位ステップ関数であり、半径 a の球殻を起点とする外向き球面波が、区間 $a \leq r \leq b$ の間でのみ存在することを表している。すなわち、区間外の波動はゼロであり、波動が区間 $a \leq r \leq b$ 内に局在している状態を表している。

4. 球面定在波の生成

式 (8b) で表される球面波が安定して存在し得る条件を考察するにあたり、式 (8a) の両辺に r をかけ式 (9) のように表現し、球面波を平面波に換算して考察する。

$$\begin{cases} r\varphi(r, t) = e^{i\omega t} \exp\{-ik(r-a)\}, & (a \leq r \leq b) \\ r\varphi(r, t) = 0, & (r \leq a, b \leq r) \end{cases} \quad (9)$$

式 (9) の要の部分、指数関数と三角関数の関係から、式 (10a) に分解できる。

$$e^{i\omega t} \exp\{-ik(r-a)\} = e^{i\omega t} \{\cos k(r-a) - i\sin k(r-a)\} \quad (10a)$$

さらに、式 (10a) の第一項と第二項はそれぞれ、式 (10b)、式 (10c) と分解できる。

$$e^{i\omega t} \cos k(r-a) = e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{2} e^{-ik(r-a)} + \frac{1}{2} e^{+ik(r-a)} \right\} \quad (10b)$$

$$e^{i\omega t} \{-i\sin k(r-a)\} = e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{2} e^{-ik(r-a)} - \frac{1}{2} e^{+ik(r-a)} \right\} \quad (10c)$$

式 (10b) の意味は、 r の正の方向への波動（入射波）と、 r の負の方向への波動（反射波）が、同位相で合成された波動である。 $r=a$ および $r=b$ の両端において同位相で反射し定在波が作られるには、式 (11) が条件となる。また、式 (10c) の意味は、 r の正の方向の入射波に対して、反射波が逆位相で合成された波動である。この合成波が定在波を形成するためには、同様に式 (11) が条件となる。

$$k(b-a) = n\pi, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

基本モードとして、 $n=1$ のときを考える。このとき、式 (10b) を図示すると、図 2 (a) のようになる。同様に式 (10c) を図示すると、図 2 (b) のようになる。

式 (10a) は、式 (10b) と式 (10c) の和である。式 (10b) の波動と式 (10c) の波動は、時間的位相が90度ずれている。その位相のずれも考慮して合成した波動を図示したものが、図 3 である。この図 3 は、空間を横軸 r の一次元で代表し、時間的位相を表す虚軸とポテンシャルを表す実軸の三次元で表現したものである。この表現方法によると波動の様子が手に取るように分かる。実線で描かれた弦もしくは紐が回転している様子が分かる。具体的なイメージとしては、 a 、 b の二箇所に立った人が、ロープをもってまわしていると考ええる。回し方には二通りある。互いに手を大きく振り回してまわす方法（自由端）と、張力と遠心力を利用して、ほとんど手を動かさずに回す方法（固定端）である。

以上をまとめると、式 (8b) で表されるような区間を区切られた球面波は、式 (11) の条件の下で球面定在波を形成する。外部的には、半径 a の球殻を波源とする外向きの球面波であるが、

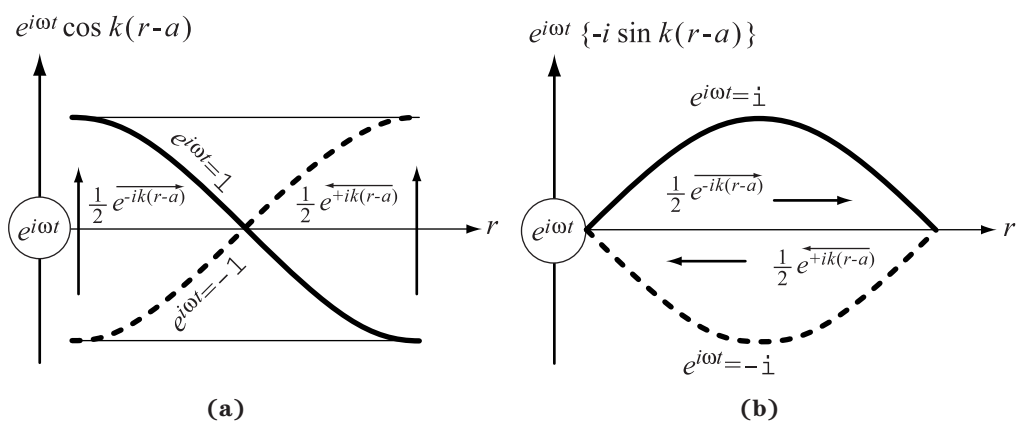


図2 球面定在波の平面波表現

(a) 両端自由端 (b) 両端固定端

Fig. 2. Plane waves expression of spherical standing waves

(a) Both free edges (b) Both fixed ends

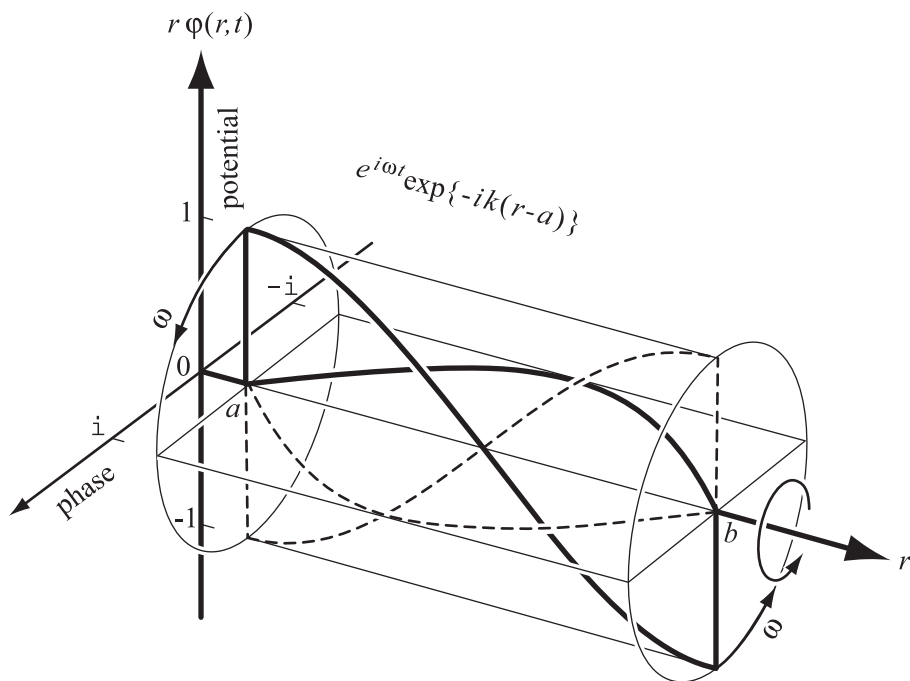


図3 定在波の“空間一位相-ポテンシャル”表現

Fig. 3. Space, phase and potentials expression of standing waves

内部的には自由端と固定端の両方を内在する定在波である。球面定在波は式 (12) のように表すことができる。

$$\begin{cases} \varphi(r, t) = \frac{e^{i\omega t}}{r} \left\{ \cos\{k(r-a)\} - i \sin\{k(r-a)\} \right\} [u_r(a) - u_r(b)] \\ k(b-a) = n\pi \end{cases} \quad (12)$$

さらに式 (13) のように置くと、式 (12) は、式 (14) のように表現することもできる。

$$\begin{cases} V(r) = \cos k(r-a) \\ I(r) = \sin k(r-a) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \varphi(r, t) = \frac{e^{i\omega t}}{r} \{V(r) - iI(r)\} [u_r(a) - u_r(b)] \\ k(b-a) = n\pi \end{cases} \quad (14)$$

ここで、 $V(r)$ は両端が自由端となる波動を示している。そのような波動として、媒質の圧力変化による波動が考えられる。また $I(r)$ は両端が固定端となる波動である。そのような波動として、媒質の流れによる波動が考えられる。圧力が流れを生み、流れが圧力を生むと考えれば、両者は相補の関係にある。なお、両者の時間的な位相は90度ずれている。媒質が真空の場合、 $V(r)$ と $I(r)$ はそれぞれ電界や磁界に分化する前の電位ポテンシャルと電流ポテンシャルと考えられる。球面定在波は、数式的には、圧力と流れのポテンシャルを複素的に合成した、複素スカラーポテンシャルによる波動とみなすことができる。

5. 球面定在波の内部エネルギー

球面波における「外向き」と「内向き」の概念は球面波を概観している者による視点であるが、球面上に立つ者の視点では、それぞれ「上向き」と「下向き」の意味を持つ。量子力学において二通りの状態しかもたない不思議な物理量としてスピンとよばれる概念がある。球面波においても他の状態量がまったく同じで、さらに外向き（↑）と内向き（↓）の二通りの球面波が存在する。

式 (15a) と式 (15b) はそれぞれ、外向きの球面波と内向きの球面波の一般式を表している。

$$\varphi^\uparrow(r) = \frac{\exp(-ikr)}{r} \quad (15a)$$

$$\varphi^\downarrow(r) = \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (15b)$$

エネルギーに相当する保存量を計算するために、空間における傾きを計算する。式 (16a) と式 (16b) は波動ポテンシャルの空間微分であり、電界あるいは磁界に相当するものである。

$$\frac{d\varphi^{\uparrow}(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2}\exp(-ikr) - \frac{ik}{r}\exp(-ikr) \quad (16a)$$

$$\frac{d\varphi^{\downarrow}(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2}\exp(ikr) - \frac{ik}{r}\exp(ikr) \quad (16b)$$

外向き（↑）と内向き（↓）の球面波が相互に作用して定在波を形成する。両者の相関関係を計算するにあたり、ベクトルの場合は内積を計算するが、ここではスカラーで表されるので、相関関係は通常の積で表される。もっとも外向き球面波と内向き球面波は共役の関係にあるので、共役同士の積を計算することと同じ意味を持つ。

$$\left(\frac{d\varphi^{\uparrow}(r)}{dr}\right) \cdot \left(\frac{d\varphi^{\downarrow}(r)}{dr}\right) = \frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2} \quad (17)$$

電界や磁界の2乗（共役の積）がエネルギー密度を表すのと同様、式（17）もエネルギー密度に相当する量を表すものと考えられる。

次に、内殻 a から外殻 b まで、球殻 $4\pi r^2 dr$ で積分し、全体のエネルギーに相当するものを求めたのが式（18）である。

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{d\varphi^{\uparrow}}{dr}\right) \left(\frac{d\varphi^{\downarrow}}{dr}\right) 4\pi r^2 dr &= 4\pi \int_a^b (r^{-2} + k^2) dr \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{r} + k^2 r \right]_a^b \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + 4\pi k^2 (b - a) \end{aligned} \quad (18)$$

よってエネルギーに相当する保存量 U は、式（19）のように求めることができる。

$$U = 4\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + 4\pi k^2 (b - a) \quad (19)$$

6. 球面定在波の自己共振周波数

前節で求めた保存量を表す式（19）の意味を考えてみよう。静電場のエネルギーと比較すると分かるように式（19）の第一項はクーロンポテンシャルに相当するものを表している。第二項は波数 k による波動のエネルギーを表していると考えられる。比喩的にいえば、前者を位置のエネルギーと捉え、後者は（内部）運動エネルギーと考えられる。また、前者を球形コンデンサに蓄えられた電氣的なエネルギーと捉え、後者は両者を結ぶ電流による磁氣的エネルギーと考えられる。

さて、球面定在波が安定して存在し続けるためには、二通りの形態をもつ内部エネルギーが、

互いの状態を交換しつ共振状態になることが必要であるとしよう。つまり、共振状態になっているときは、両者が交換するエネルギーは等しいと仮定する。すると式 (20) で表される関係式が求められる。

$$4\pi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=4\pi k^2(b-a) \quad (20)$$

これより波数 k の満たす条件として、式 (21a) が導かれる。

$$k^2=\frac{1}{ab} \quad (21a)$$

波動の速さを表す定数 c を用いると、 $k=\omega/c$ の関係から、球面定在波の自己共振角波数 ω は式 (21b) で、自己共振周波数 f は式 (21c) で表される。

$$\omega=\frac{c}{\sqrt{ab}} \quad (21b)$$

$$f=\frac{c}{2\pi\sqrt{ab}} \quad (21c)$$

なお、この共振周波数を表す式 (21c) は、同心球面对における共振回路として古典的電磁気学の考察 [2] から求めた式と一致する。

7. 球面定在波の幾何的構造

式 (21) によれば、内径 a と外径 b の積が一定であれば、波数あるいは周波数は一定であることがわかる。また、周波数は内径と外径の相乗平均に逆比例する。逆に波数（周波数）が一定であるとき、内径と外径はどのような値をとり得るのであろうか。ここでは球面定在波の幾何的形状とポテンシャルとの関係を考察する。

考察にあたり、内径 a と外径 b を波数で規格化し式 (22) のように α 、 β で表すことにする。式 (19) と式 (20) は、それぞれ式 (23) と式 (24) に書き直すことができる。

$$ka=\alpha, \quad kb=\beta \quad (22)$$

$$U=4\pi k\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)+4\pi k(\beta-\alpha) \quad (23)$$

$$4\pi k\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=4\pi k(\beta-\alpha) \quad (24)$$

定在波が作られる条件式 (11) は式 (25) のように書き直すことができる。

$$\beta-\alpha=n\pi, \quad (n=1,2,3\dots) \quad (25)$$

式 (23) と式 (24) から U を求め、式 (25) の条件を代入すると、保存量 U は式 (26) で表

される。ただし、この保存量 U は、波源の振幅が 1 となるような自然単位系で表現している。

$$U = (8\pi^2 k) n \quad (26)$$

保存量 U が最低となる、 $n=1$ の場合を考えると、式 (24) と式 (25) から α 、 β の関係は、式 (27) で表される。

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \beta - \alpha = \pi \end{cases} \quad (27)$$

式 (27) を $0 < \alpha < \beta$ の条件で解くと、式 (28) の解を求めることができる。

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \\ \beta = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \end{cases} \quad (28)$$

図 4 (a) の実線は、時間的な位相を表す ωt が 0 のときのポテンシャルを表している。ポテンシャルの波動が存在する範囲は、 $\alpha \leq kr \leq \beta$ で、両端は自由端となっており、電圧ポテンシャルとして観測される状態である。なお、 $0 \leq kr \leq \alpha$ または $\beta \leq kr$ の範囲は、もともと波動自体が存在しないか、同種逆位相の波動で相殺されているため、ポテンシャルはゼロである。そのため、電圧ポテンシャルの空間微分である電界は、 α および β の球面で非連続になる。もし電気力線を描くとすれば、 α を始点とし β を終点とする力線が描かれる。つまり、電気力線の始点である半径 α の球殻には正の電荷が、電気力線の終点である半径 β の球殻には負の電荷が存在するように観測される。

ポテンシャルの最大値と、定在波の存在範囲との間には、ある一定の関係がある。図 4 (a) から分かるように、 $kr=\alpha$ のとき、ポテンシャルは最大値 β をとり、 β は $kr=\beta$ により球面定在波の外殻を規定する。図 4 (a) の点線は、実線と時間的位相が π 、すなわち 180 度異なる状態である。球の内側と外側の状態を入れ替えた、いわば表裏反転した状態である。もしこの状態が観測されたとしたら、半径 α の内部球殻は負の電荷が、半径 β の外部球殻は正の電荷が観測されるであろう。

時間的な位相 ωt が 90 度のとき、図 4 (a) のような両端が自由端のポテンシャルはゼロとなるが、代わりに図 4 (b) の実線のような両端が固定端となる球面定在波が現れる。球殻 α の電圧が減少することによる電流が外向きに流れる。外向き（正方向）と内向き（負方向）の流れの合成が電流ポテンシャル定在波を形成する。

図 5 は、球面定在波の位相変化を模式的に図示したものである。

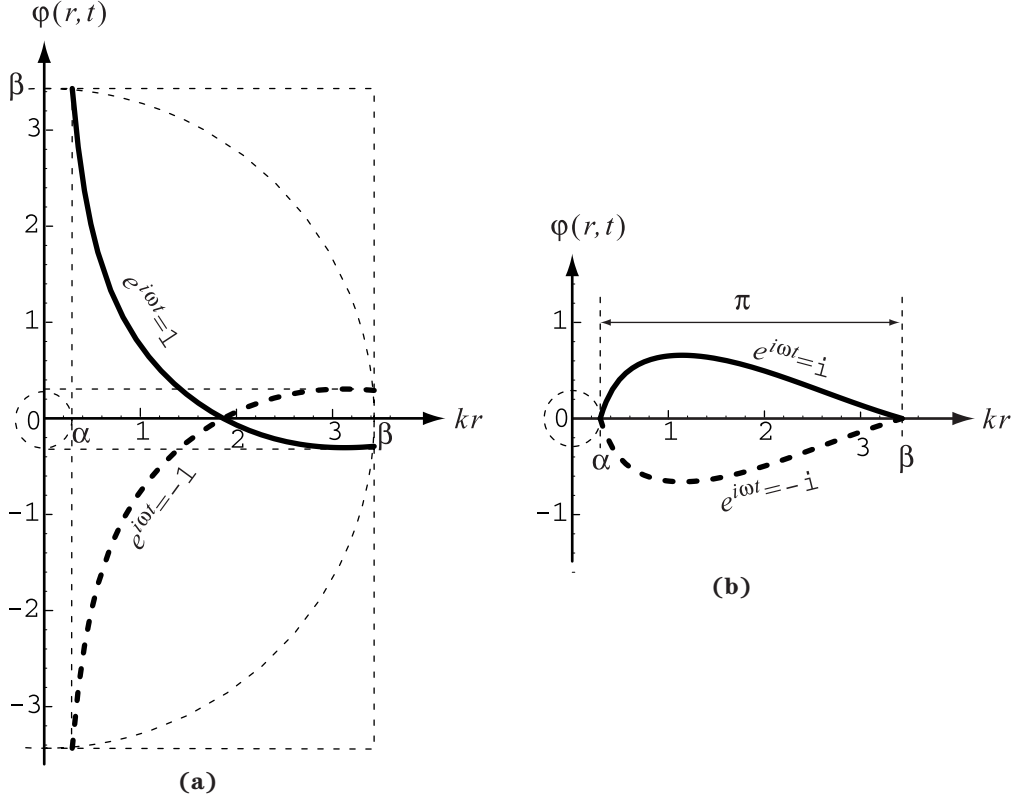


図 4 球面定在波の幾何的構造

(a) 電圧ポテンシャル

(b) 電流ポテンシャル

Fig. 4. Geometric structure of spherical standing waves

(a) Electric potential

(b) Current potential

以上 $n = 1$ の基本モードについて考察してきたが、次に式 (25) の条件での一般解は、同様に式 (29) の二次方程式を解き、式 (30) を得る。

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \beta - \alpha = n\pi \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{n\pi}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \\ \beta = \frac{n\pi}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \end{cases} \quad (30)$$

式 (30) から分かるように、 n が大きくなり球面定在波にエネルギーが蓄えられると、内径 α はより内側に移動し、外径 β は、 $\beta = 1/\alpha$ の関係から、より外側に広がっていく。

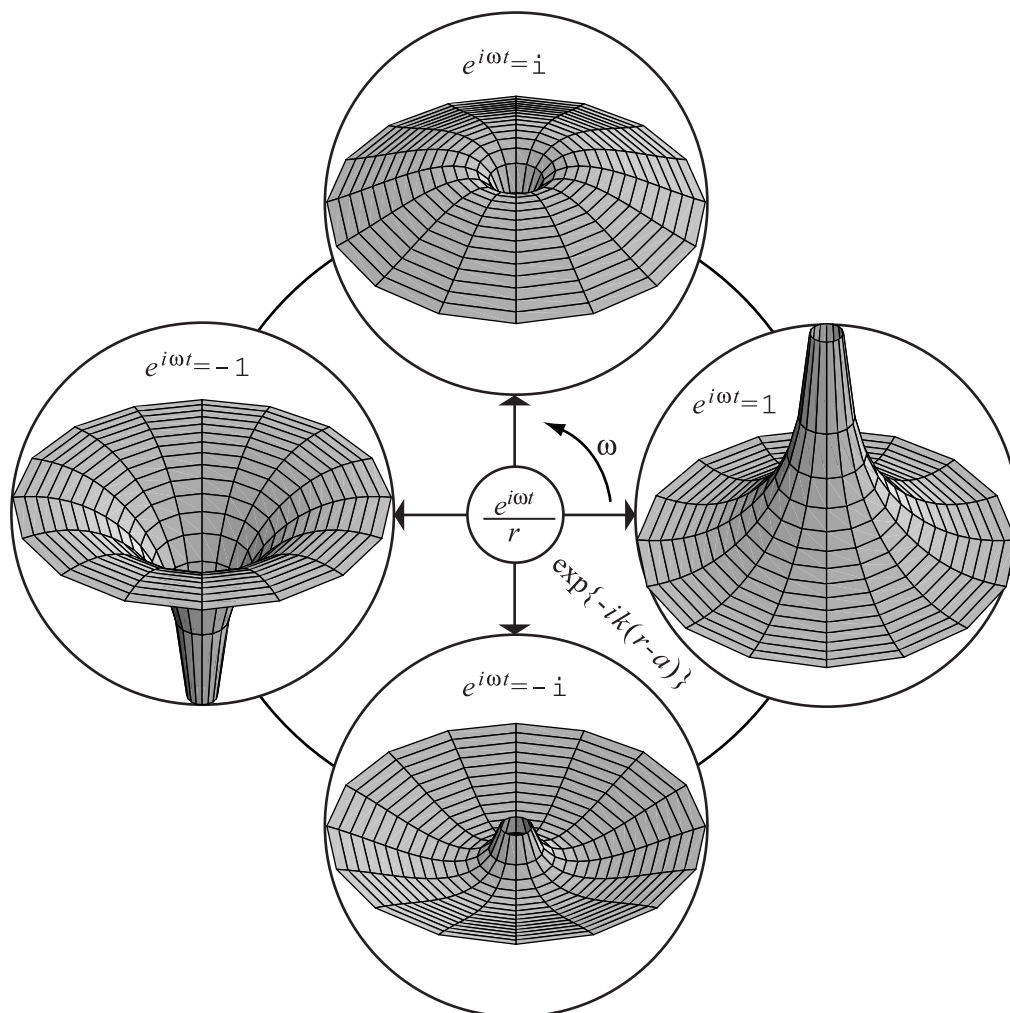


図5 球面定在波の位相変化モデル

Fig. 5. Phase shift of spherical standing waves

8. まとめ

平衡状態に保たれた仮想空間から、球面定在波が作られる過程を考察した。球面定在波は、波動のエネルギーが、ある大きさの球体内に局在している状態である。外部から見たら、球体は静止している状態に見えるであろう。内部のエネルギーが、外部に対しては慣性（動かし難さ）をもつと考えられ、それが慣性質量として観測されることが考えられる。

何もない空間から物質が出現するというのは、想像しにくい。しかし、何もないと思われていた、空間（真空）それ自体に、ここで考察したような構造が備わっていると考えれば、生成は突

然でも偶然でも飛躍でもない。同様に、宇宙の最初が仮にビッグバンであったとしても、それ以前の空間自体に物質が生まれるべき準備や条件が備わっていたと考える方が、自然ではなかろうか。

球面定在波は、内部エネルギーと周波数と幾何的構造の三者間に密接な関係があることが考察された。あたかも自らの存在がそのパラメータを規定するかのようである。真空中の振動を想定して考察したので、波動の速さ c は光速を想定しているが、音速を当てはめれば、音波についての考察にも応用できるだろう。

球面波は中心に波源があるから生じると考えられがちであるが、球面定在波の中心にある自由端と固定端が波源に見えると考えることもできる。そこで、もし点電荷が、 $e^{i\omega t}$ で表される形式をしているという仮説 [3] を採用するならば、点電荷は、電圧源と電流源の両方の役目をする球面波の波源であるという結論を導くことができる。

謝 辞

電気の基礎を大阪大学基礎工学部電気工学科において学ぶことができたことに感謝する。人間の認知能力について同大学大学院言語文化研究科で考察することができたことに感謝する。本論文をまとめる場を与えられた帝塚山学院大学人間文化学部に感謝する。論文をまとめるにあたり内助を惜しまなかった家族に感謝する。

文 献

- [1] 榊 米一郎、大野 克郎、尾崎 弘 (編)、「大学課程 電気回路 (2) (第2版)」、オーム社、p.116、1980.
- [2] 戸上良弘、「同心球面対における共振回路」、帝塚山学院短期大学 研究年報46、pp.62-74、1998.
- [3] 戸上良弘、「点電荷の複素ポテンシャル表現とその意味について」、帝塚山学院短期大学 研究年報45、pp.95-110、1997.