

# 球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察

Internal energy structure of spherical standing wave

戸 上 良 弘

Yoshihiro Togami

## あらまし

複素振幅をもつ球面波は、内部的には二種類の球面定在波に分解できることを示した。その球面定在波と等価な  $LC$  共振回路を考えたとき、内部エネルギーは点電荷による静電的エネルギーと、定常電流による磁氣的エネルギーの和で表されることを示した。定量的な考察をするための基礎となる内部エネルギー等の計算式を求めた。

球面定在波の最低エネルギー状態を想定し、微細エネルギー構造を考察した。電荷素量、プランク定数、微細構造定数が、球面定在波の微細構造を決める重要なパラメータとなっていることが考察された。

キーワード：球面波、定在波、共振回路、電荷素量、プランク定数、微細構造定数

## 1. はじめに

球面波は平面波と同様に基本的な波動であるが、平面波に比べてあまり考察されていない。前著「球面定在波の生成と自己共振に関する考察」において、球面波が定在波を形成する条件等を求めた[1]。

- (1) 内径  $a$  と外径  $b$
- (2) 内部エネルギー
- (3) 共振周波数や波数  $k$

この三者の間に密接な関係がある。前著では、定性的な考察を中心としたが、本稿では特に内部エネルギーに関し、定量的な考察をするための計算式を求めることにする。

## 2. 球面定在波

### 2. 1 複素振幅の意味

式(1)は、比例係数などを取り除いた基本的な球面波を表している。 $\omega$ は角周波数を表し、単位時間あたりの位相変化を表すものである。 $k$ は $2\pi$ を波長 $\lambda$ で割った波数であり、空間的な位

相変化を表すものである。

複素振幅をもつ式(1)の球面波の実部を考えると、式(2)のように表される。この場合、等位相面が時間とともに外向きに移動することから、外向きの球面波であると考えられている。振幅を複素数で表すのは計算上の都合であり、虚数部に物理的な意味はないと考えられることも多い。しかし量子力学においては、波動の振幅が本質的に複素数で表されることが要求される。ここでは複素振幅の意味について考察する。

$$\varphi(r,t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (1)$$

$$\text{Re}\varphi(r,t) = \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} \quad (2)$$

式(1)を式(3)のように分解する。第一項は外向き球面波と内向き球面波を和によって合成した波動であり、媒質の圧力変化を表す波動と考えることができる。また、第二項は外向き球面波と内向き球面波を差によって合成した波動であり、媒質の流れを表す波動であると考えられる[1]。

$$\varphi(r,t) = \left( \frac{1}{2} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} + \frac{1}{2} \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} - \frac{1}{2} \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r} \right) \quad (3)$$

指数関数と三角関数の関係を用い、虚数係数を時間的位相のずれと捉えれば、式(3)は、式(4)のように書き直せる。この式(4)は、時間的位相の90度ずれた二種類の空間的定在波が、時間的

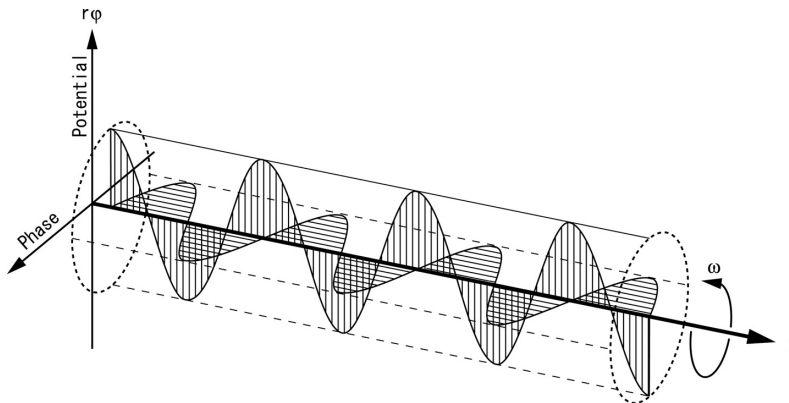


図1 複素振幅をもつ球面波の内部波動

Fig.1 Internal wave motion of the spherical wave which has complex amplitude.

位相 $\omega$ で回転している状態と見るができる。図1はその様子をモデル化した図であり、複素振幅をもつ球面波の内部波動を表している。

$$\varphi(r,t) = \frac{e^{i\omega t}}{r} \cos kr + \frac{e^{i(\omega t - \pi/2)}}{r} \sin kr \quad (4)$$

以上より、振幅が複素数で表される式(1)の球面波は、外部的には外向きの球面波と捉えられるが、内部的には位相が時間的に回転している球面定在波であると捉えることができる。

## 2. 2 球面定在波のポテンシャルと点電荷との関係

定量的な考察をするため、式(1)に係数を掛けた式(5a)で表される電氣的ポテンシャルの球面波を考える。

$$\varphi(r,t) = \frac{q_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5a)$$

ここで、 $\epsilon_0$ は真空の誘電率であり、 $4\pi$ は球の立体角を表す。球面波の振幅は、中心からの距離 $r$ に逆比例し一定ではないが、 $q_0$ はその振幅に比例する係数である。つまり $q_0$ は、球面波の強さを表す振幅係数とみなすことができる。もっとも点電荷 $q_0$ が作る静電場との対応から考えれば、 $q_0$ は電荷の大きさとみなすこともできる。その場合式(5a)は、時間的位相 $\omega$ で変化する点電荷 $q = q_0 e^{i\omega t}$ の、空間的位相の遅れを $e^{-ikr}$ とする遅延ポテンシャルとして表現したものと捉えることができる。

式(5b)は、球面定在波の内径 $a$ と外径 $b$ を強調した表現である。 $u_r(a)$ は半径 $r$ が $a$ より小さいとき $u_r(a) = 0$ 、半径 $r$ が $a$ より大きいとき $u_r(a) = 1$ となる単位ステップ関数であり、 $[u_r(a) - u_r(b)]$ は区間 $a \leq r \leq b$ でのみ球面波が存在することを強調するために付加した表現である[1]。

$$\varphi(r,t) = \frac{q_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} [u_r(a) - u_r(b)] \quad (5b)$$

## 3. 球面定在波の内部エネルギー

### 3. 1 エネルギー密度

式(5a)のポテンシャルによって作られる空間の傾き、すなわち電界に相当する量は、球の対称性から半径 $r$ 方向の成分のみを持つため、式(6)のように計算される。

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{i(\omega t - kr)} + \frac{iq_0 k}{4\pi\epsilon_0 r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (6)$$

また、エネルギー密度は複素共役との積に  $(1/2) \varepsilon_0$  をかけ、式 (7) のように表される。

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) = \frac{q_0^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0} \left( \frac{1}{r^4} + \frac{k^2}{r^2} \right) \quad (7)$$

よって、式 (5b) のような内径  $a$  と外径  $b$  の内部に局在する球面定在波の内部エネルギー  $U$  は、式 (8) として表される。この式の意味については、3. 2 節で考察する。

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) 4 \pi r^2 dr \\ &= \frac{q_0^2}{8 \pi \varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{q_0^2}{8 \pi \varepsilon_0} k^2 (b-a) \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. 2 電氣的等価回路

球面定在波を電気回路とみなしたときの電氣的等価回路を考える。内径  $a$  と外径  $b$  の同心球面対によるコンデンサーと考えたとき、そのキャパシタンス  $C$  は、式 (9) で表される。

$$C = \frac{4 \pi \varepsilon_0}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \quad (9)$$

よって、内径  $a$  の面に電荷  $+q_0$  が与えられ、外径  $b$  の面に  $-q_0$  の電荷が与えられたとき、コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー  $U_e$  は、式 (10) で表される。

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{q_0^2}{8 \pi \varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (10)$$

次に、球対称の電流場が作るエネルギーを考える。電流場は中心の電荷  $q$  が減少することにより、電流  $I$  が放射状に流れることによって作られる。このとき、同量逆向きの変位電流が中心に向かって流れるため、図2のような半径方向に往復する球状の電流場が形成される[2]。電流と変

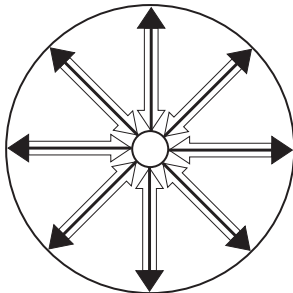


図2 球状の放射電流場  
Fig.2 Spherical emission current.

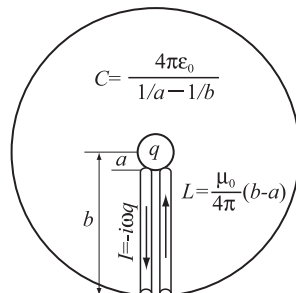


図3 球面定在波の電氣的等価回路  
Fig.3 Electric equivalent circuit of spherical standing wave.

位電流は同量逆方向であること、また球の対称性から、電流によって作られる磁場は球の外部には現れない。しかし、内部的には電流による磁気的エネルギーとして蓄えられるものと思われる。

一般に無限長の針金の断面に一樣に電流が流れるとき、針金の内部インダクタンスは針金の太さに関係なく、単位長あたり  $\mu/8\pi$  であることが知られている [3]。針金の長さを往復  $2(b-a)$  と考え、真空中の透磁率  $\mu_0$  を用いれば、等価インダクタンス  $L$  は、式(11)で見積もることができる。

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}(b-a) \quad (11)$$

電荷が  $q_0 = q_0 e^{i\omega t}$  で時間変化するとき、電流は  $I = -i\omega q$  と表される。 $I^2 = I \cdot I^* = q_0^2 \omega^2$  より、電流による内部磁場のエネルギー  $U_i$  は式(12a)のように表される。

$$U_i = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0}{8\pi} q_0^2 \omega^2 (b-a) \quad (12a)$$

式(12a)は、角周波数と波数の関係  $\omega = kc$  から、式(12b)のように書きなおせる。

$$U_i = \frac{\mu_0}{8\pi} q_0^2 c^2 k^2 (b-a) \quad (12b)$$

また、光速  $c$  と真空中の誘電率・透磁率の関係  $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$  より、式(12c)のようにも書き直せる。

$$U_i = \frac{q_0^2}{8\pi \epsilon_0} k^2 (b-a) \quad (12c)$$

以上、式(10)と式(12c)より、式(8)で求めた球面定在波の内部エネルギーの第一項は、電氣的ポテンシャルのエネルギーであり、第二項は磁氣的エネルギーであると考えられ、式(13)のようにまとめることができる。

$$\begin{cases} U_e = \frac{q_0^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ U_i = \frac{\mu_0}{8\pi} q_0^2 c^2 k^2 (b-a) \\ U = U_e + U_i = \frac{q_0^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{\mu_0}{8\pi} q_0^2 c^2 k^2 (b-a) \end{cases} \quad (13)$$

エネルギーの視点で見れば、電氣的エネルギー  $U_e$  は電荷  $q_0$  による静電場のエネルギーと等価であり、磁氣的エネルギー  $U_i$  は電流  $I = q_0 c k$  による定常電流のエネルギーと等価である。図3は球面定在波の電氣的等価回路を示している。

### 3. 3 球面定在波の共振条件

球面定在波の共振条件は、電氣的エネルギー  $U_e$  と磁氣的エネルギー  $U_i$  が等しいとき、すなわち式(14)が成り立つときである。

$$\frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\mu_0}{8\pi} q_0^2 c^2 k^2 (b-a) \quad (14)$$

これより共振条件、式(15)を得る。

$$k^2 ab = 1 \quad (15)$$

式(15)の共振条件を満たすとき、全エネルギー  $U$  は、式(16a)または式(16b)と表される。

$$U = 2U_e = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (16a)$$

$$U = 2U_i = \frac{\mu_0}{4\pi} q_0^2 c^2 k^2 (b-a) \quad (16b)$$

またエネルギーと質量の等価性より、球面定在波の質量  $m$  は式(17)で表される。

$$m = \frac{U}{c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_0^2 k^2 (b-a) \quad (17)$$

## 4. 微細エネルギー構造に関する考察

### 4. 1 微細構造定数と最低エネルギー条件

球面定在波は、周波数（波数）と大きさ（内径と外径）と内部エネルギーの三者に密接な関係があり、相互にパラメータを規定する。少なくとも電気の基本法則が成り立つ範囲においては、原子スケールでも、地球スケールでも、ミクロからマクロまで幅広いスケールで成り立つと考えられる。

しかし、球面定在波が成立する最低のエネルギー条件は存在するであろう。例えば、球面波の強さを決める振幅係数を  $q_0 = 0$  とした場合、もはや球面定在波とはいえない。つまり球面定在波を形成するための最低の振幅係数というものが考えられるはずであり、それが電荷素量であると考えられる。最低のエネルギー状態が決まれば、それによって、基本波数  $k$  や内径  $a$ 、外径  $b$  など基底状態のパラメータが規定されるはずである。

量子力学において、エネルギー量子に関わる重要な定数としてプランク定数  $h$  がある。またプランク定数を  $2\pi$  で割ったディラック定数  $\hbar$  もよく使われる。この  $\hbar$  は、時間的位相一回転あたりのエネルギー量子であると考えられる。また、量子力学においてよく現れる定数に、微細構造定数  $\alpha$  というものがある。これは式(18)で表され、単位の取り方によらない無次元の定数である。またその逆数は、約137であることが知られている。しかしこの定数が何を意味するのか、今までよく分からなかった。ただし、ここでの記号  $e$  はネイピア定数（自然対数の底）ではなく、電荷素量のことである。

$$\alpha = \frac{\mu_0 e^2 c}{2h} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137} \quad (18)$$

エネルギーを表す式(16b)で、 $q_0$  を電荷素量  $e$  で置き換え、微細構造定数  $\alpha$  を用いて、時間的位相一回転あたりのエネルギー  $U/\omega$  を求めると、式(19)のようになる。

$$\frac{U}{\omega} = \frac{\mu_0}{4\pi} e^2 c k(b-a) = \hbar \alpha k(b-a) \quad (19)$$

時間的位相一回転あたりの球面定在波の最低エネルギーが、 $U/\omega = \hbar$  と表されるとすれば、求める最低エネルギー条件は式(20a)である。

$$\alpha k(b-a) = 1 \quad (20a)$$

式(20a)を式(20b)のように書き直せば、波数  $k$  で規格化した外径  $kb$  と内径  $ka$  の位相距離が、 $1/\alpha$  であることを示している。

$$kb - ka = \frac{1}{\alpha} \quad (20b)$$

つまり、微細構造定数は、位相距離の量子化、すなわち球面定在波の最小形状に関するパラメータであると考えられる。

## 4. 2 定量的考察

電荷素量  $e$  が作る基底状態の球面定在波を考える。式(20b)の最低エネルギー条件と、式(15)の共振条件を合わせると、式(21)の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} ka - kb = \frac{1}{\alpha} \\ k^2 ab = 1 \end{cases} \quad (21)$$

これを、規格化内径  $ka$ 、規格化外径  $kb$  について解くと、式(22)が得られる。

$$\begin{cases} ka = -\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1} \\ kb = \frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1} \end{cases} \quad (22)$$

また内径  $a$  と外径  $b$  の比は、式(23)で表される。

$$\frac{b}{a} = \frac{kb}{ka} = \frac{\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1}}{-\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1}} \quad (23)$$

表1は、球面定在波の基底状態における内径 $a$ 、外径 $b$ と波数 $k$ の関係を、微細構造定数を用いて表したものである。三つのパラメータのうち、一つの値を定めれば、他の二つの値は計算で求めることができることを示している。

表1 基底状態における内径 $a$ 、外径 $b$ と波数 $k$ の関係

Table 1. Relations between inside diameter  $a$ , major diameter  $b$  and the wave number  $k$  in ground state.

| 名称と記号                  | 式                                                                       | 値              |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 微細構造定数 $\alpha$ の逆数[4] | $1/\alpha$                                                              | 137.0359998    |
| 規格化内径 $ka$             | $ka = -\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1}$ | 0.007296963981 |
| 規格化外径 $kb$             | $kb = \frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1}$  | 137.0432967    |
| 内径径比 $b/a$             | $b/a = kb/ka$                                                           | 18780.86518    |
| 波数 $k$                 | $k = 1/\sqrt{ab}$                                                       |                |

球面定在波の内的性質を定める最も基本的なパラメータは波数 $k$ であると考えられる。この波数 $k$ が直接観測される場合はよいが、間接的に求める場合は注意が必要である。基底状態における最低エネルギー値は、波数 $k$ に対してそれぞれ決まる値であるから、エネルギー値または質量から波数 $k$ を逆算することもできる。しかし、そのエネルギーや質量が、基底状態を測定したものであるかどうか一般には判別しにくい。というのは質量やエネルギーは、個々の内的状態の総和で決まるパラメータであり、内部の個々の状態を直接反映するパラメータではないからである。

表2は、ある球面定在波の各物理量の具体的な計算例である。ここでは基底状態にある球面定在波の外径 $b$ として、原子単位としても使われるボーア半径を援用した。外径 $b$ 以外の物理量はすべて計算式により、有効数字8桁まで求めた。

表2 ボーア半径を外径にもつ球面定在波の基底状態

Table 2. Ground state of the spherical standing wave which has Bohr radius in major diameter.

| 名称と記号         | 計算式                                                        | 計算値                                     | 参考比較値※[4]                                             |
|---------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 外径 $b$        | ボーア半径の値を援用[4]                                              | $5.2917721 \times 10^{-11} [\text{m}]$  |                                                       |
| 内径 $a$        | $b \div (b/a)$<br>表1の内外径比を利用                               | $2.8176402 \times 10^{-15} [\text{m}]$  | ※電子の古典半径<br>$2.8179403 \times 10^{-15} [\text{m}]$    |
| 波数 $k$        | $k=1/\sqrt{ab}$                                            | $2.5897430 \times 10^{12} [1/\text{m}]$ |                                                       |
| 波長 $\lambda$  | $\lambda=2\pi \sqrt{ab}$                                   | $2.4261810 \times 10^{-12} [\text{m}]$  | ※電子のコンプトン波長<br>$2.4263102 \times 10^{-12} [\text{m}]$ |
| 角周波数 $\omega$ | $\omega = \frac{c}{\sqrt{ab}}$                             | $7.7638542 \times 10^{20} [1/\text{s}]$ |                                                       |
| 周波数 $f$       | $f = \frac{c}{2\pi\sqrt{ab}}$                              | $1.2356558 \times 10^{20} [\text{Hz}]$  |                                                       |
| 全エネルギー $U$    | $U = \frac{\mu_0}{4\pi} e^2 k^2 c^2 (b-a) = \hbar k c$     | $8.1875401 \times 10^{-14} [\text{J}]$  |                                                       |
| 質量 $m$        | $m = \frac{\mu_0}{4\pi} e^2 k^2 (b-a) = \frac{\hbar k}{c}$ | $9.1098669 \times 10^{-31} [\text{kg}]$ | ※電子の質量<br>$9.1093819 \times 10^{-31} [\text{kg}]$     |

## 5. まとめ

複素振幅で表現される外向きの球面波は、内部構造を考えることによって球面定在波として捉えることができた。この球面定在波をエネルギーの視点で見れば、静電場と定常電流場によってできるエネルギーの和と等価である。このことを逆にいえば、静電気のように静的な現象として捉えられているものでも、見えない内面においては非常に高い内部振動が存在する可能性が示唆される。

球面定在波の振幅係数は、電荷と等価であるとみなすことができ、球面定在波が形成されるための最低振幅係数が電荷素量であると考えられる。基底状態である最低エネルギー状態を考察することで、微細構造定数が球面定在波の最小形状に関与するパラメータであることが考察された。

電子を球面定在波に対応させて考えた場合、量子力学で犠牲にされていた表象や意味を考えることができる。たとえば電子の位置と運動量はそれぞれ電荷の状態と電流の状態に対応するが、両者は時間的位相が90度ずれているため同時には観測されない。これが不確定性原理の本質的意味であると考えられる。時間的位相の回転を電子の自転と考えれば、スピンと呼ばれるものの概念とも一致する。流れのポテンシャルは外向きの球面波と内向きの球面波の差による合成で表されるが、これがスピンの上向きの状態と下向きの状態に対応していると考えられる。

## 謝辞

電気の基礎を大阪大学基礎工学部電気工学科において学ぶことができたことに感謝する。人間の認知能力について同大学大学院言語文化研究科で考察することができたことに感謝する。本論文をまとめる場を与えられた帝塚山学院大学人間文化学部に感謝する。論文をまとめるにあたり内助を惜しまなかった家族に感謝する。

## 文献

- [1] 戸上良弘、「球面定在波の生成と自己共振に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第6号、pp.39-51、2004.
- [2] 戸上良弘、「同心球面対における共振回路」、帝塚山学院短期大学 研究年報46、pp.62-74、1998.
- [3] 熊谷寛夫・荒川泰二、「電磁気学 朝倉物理学講座 5」、朝倉書店、p.161、1965.
- [4] 文部科学省 国立天文台編、「理科年表 第77冊」、丸善株式会社、2004.

(2005年10月5日 脱稿)