球面定在波のエネルギー遷移に関する考察

Energy transition of spherical standing wave

戸　上　良　弘
Yoshihiro Togami

あらまし

球面定在波の基底状態を、スピン1/2の状態として内部エネルギーを計算した。共振条件と量子条件から内径・外径・波数などの基本パラメータを求めたところ、解として粒子と反粒子に相当する二種類の球面定在波が得られた。

球面定在波が共振条件を保ちながら他の状態に遷移する方法を考察した。球面定在波の基底状態の外径にボーア半径を当てはめたところ、水素原子のエネルギー準位やリュードベリ定数を導くことができた。

キーワード：球面波、定在波、共振条件、量子条件、スピン、反粒子、リュードベリ定数

１．はじめに

筆者は10年以上前から、点電荷のエネルギー発散問題について考察してきた。点電荷それ自体に構造があると考え、複素点電荷の存在を仮定することで、球面定在波という概念にたどり着いた。

前論文「球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察」において、球面定在波の内部エネルギー等を表す計算式を求めた。球面定在波と電子を対応させて質量を計算したところ、電子の既存質量測定値と有効数字４桁の範囲で一致した。

その後、エネルギー遷移を考察し水素原子のエネルギー準位と対応させたところ、既存の理論式よりエネルギーの値が２倍だけ大きく計算され、頭を悩ました。前論文ではエネルギーの算出に電界のエネルギーをモデルに計算したため、量子力学で重要なスピンという概念を十分に加味することができなかった。本論文では、基底状態の球面定在波がスピン1/2の状態であるということを前提にエネルギーの計算式を補正した。

２節では上記の補正を加味し、球面定在波の基本事項をこれまでの考察とあわせてまとめた。なお粒子と反粒子の考察については本論文であらたに追加した内容である。３節は球面定在波のエネルギー遷移に関する考察である。

2．球面定在波

2．1　球面定在波を表す基本式

式(1) は基本的な外向きの球面波を表す式である。角周波数ωは時間的位相を表し、波数kは空間的位相を表している。ε_0は真空の誘電率であり、$\varphi(r,t)$ は電気的なポテンシャルを想定している。球面波は中心に波源の存在を暗黙に仮定しているが、$r=0$のとき振幅が無限大になるため、中心の扱いが難しく実用性と実在性に問題があった。

$$\varphi(r,t)=\frac{q_0 e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1}$$

式(2) は基本式な球面定在波を表す式である。外部的には外向きの球面波であるが、半径aの内球面と半径bの外球面に囲まれた範囲にのみ、その波動が存在しているのが特徴である。ここで$u_r(a)$ は、$r<a$のとき$u_r(a)=0$、$r>a$のとき$u_r(a)=1$となる空間rに関する単位ステップ関数であり、［$u_r(a)-u_r(b)$］は存在区間［a, b］を明示的に表すために付加している［1]。

$$\varphi(r,t)=\frac{q_0 e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}[u_r(a)-u_r(b)] \tag{2}$$

$\varphi(r,t)$ は半径aの球面に存在する波源（複素点電荷）$q=q_0e^{i\omega t}$による遅延ポテンシャルという見方もできる。q_0は球面定在波の振幅係数であるが、結果的に電荷の大きさと等価と考えてよい。そこで必要に応じ電荷素量を表す記号eと置き換えるが、ネイピア定数e（自然対数の底）と混同しそうなときはq_0のまま扱う。

式(3) の波動$\varphi^*(r,t)$ は、式(2) の波動$\varphi(r,t)$ の複素共役であり、内向きの球面波によって作られる球面定在波である。

$$\varphi^*(r,t)=\frac{q_0 e^{-i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}[u_r(a)-u_r(b)] \tag{3}$$

さらに$\varphi(r,t)$ は、共役な球面定在波$\varphi^*(r,t)$ を用いて、恒等的に式(4) のように表現できる。内部的には和で合成される圧力の定在波と、差で合成される流れの定在波が内在している。このことが外部的には外向きに見える球面波が、内部波動を考えることによって球面定在波とみなせる理由である。

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(r,t)+\varphi^*(r,t)\right)+\frac{1}{2}\left(\varphi(r,t)-\varphi^*(r,t)\right) \tag{4}$$

2．2　球面定在波の内部エネルギー

一般に電界 E によって作られるエネルギー密度は、(1/2) $\varepsilon_0 EE^*$ と表される。この意味は、E と共役な電界 E^* を別に想定し、相互作用のエネルギーを計算する。1/2の因子は互いに二重に算出した分を半分に補正するためである。

式(2) で表される球面定在波の内部エネルギーを考える。式(4) から分かるように、内部波動の振幅は外部波動の振幅の1/2であることと、共役な波動がすでに内在していることから、エネルギー密度は $\varepsilon_0(E/2)(E^*/2)$ と見積もる必要がある。よって球面定在波のエネルギー密度は式(5c)のように求めることができる。

$$E=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}e^{i(\omega t-kr)}+\frac{iq_0k}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{i(\omega t-kr)}=\frac{\varphi(r,t)}{r}+ik\varphi(r,t) \tag{5a}$$

$$E^*=-\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}e^{-i(\omega t-kr)}-\frac{iq_0k}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-i(\omega t-kr)}=\frac{\varphi^*(r,t)}{r}-ik\varphi^*(r,t) \tag{5b}$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{E}{2}\right)\left(\frac{E^*}{2}\right)=\frac{\varepsilon_0}{4}\left(\frac{\varphi\varphi^*}{r^2}+k^2\varphi\varphi^*\right)=\frac{q_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^4}+\frac{k^2}{r^2}\right) \tag{5c}$$

球面定在波が存在する区間［a, b］におけるエネルギーを計算すると、式(6) のようになる。

$$U=\int_a^b\frac{q_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^4}+\frac{k^2}{r^2}\right)4\pi r^2dr=\frac{q_0^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{q_0^2}{16\pi\varepsilon_0}k^2\left(b-a\right) \tag{6}$$

ここで、光速と誘電率・透磁率の関係 $c^2\varepsilon_0\mu_0=1$ を用い、球面定在波の振幅係数の自乗 q_0^2を電荷素量の自乗 e^2に置き換えると、式(7) のように書き直せる。

$$U=\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{\mu_0}{16\pi}e^2c^2k^2\left(b-a\right) \tag{7}$$

さらに微細構造定数 α を用いて式(7) を整理すると、式(9) となる。

$$\alpha=\frac{\mu_0e^2c}{4\pi\hbar}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\simeq\frac{1}{137.036} \tag{8}$$

$$U=\frac{\hbar c\alpha}{4}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{\hbar c\alpha}{4}k^2\left(b-a\right) \tag{9}$$

2．3　共振条件と量子条件

式(7) の第一項は電気的エネルギーであり、第二項は磁気的エネルギーに相当する。球面定在波が安定して存在するには両者のエネルギーが等しく、内部で自己共振していることが条件である。その共振条件は、波数 k と存在範囲を示す内径 a 外径 b を用いて、式(10) で表される。

$$k^2ab = 1 \tag{10}$$

最低エネルギー状態である基底状態を考える。前論文［2］では、時間的位相一回転あたりのエネルギー量子が、$\hbar$ と表されるときが基底状態であると考えた。しかしながら電子などの素粒子は、スピン1/2という状態を取ることが知られている。スピン1/2という状態は、位相半回転を一単位とし、時間的位相半回転あたりのエネルギー量子が $\hbar$ になる状態と捉えることができる。よって基底状態の量子条件は、式(11) で表されると考えるのが妥当である。

$$U = \hbar\frac{\omega}{2} \tag{11}$$

エネルギーを表す式(9) と共振条件の式(10)、量子条件の式(11) から、連立方程式(12) が得られる。

$$\begin{cases} kb - ka = \dfrac{1}{\alpha} \\ k^2ab = 1 \end{cases} \tag{12}$$

これを、ka、kb について解くと式(13) が得られる。

$$\begin{cases} ka = -\dfrac{1}{2\alpha} \pm \dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{1+4\alpha^2} \\ kb = \quad \dfrac{1}{2\alpha} \pm \dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{1+4\alpha^2} \end{cases} \tag{13}$$

ここで $4\alpha^2 \ll 1$ であるから、解は近似的に式(14a) または式(14b) と表される。

$$\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha \\ \dfrac{1}{\alpha} + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.007297 \\ 137.043 \end{pmatrix} \tag{14a}$$

$$\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\alpha} - \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -137.043 \\ -0.007297 \end{pmatrix} \tag{14b}$$

２．４　粒子と反粒子

波数 k と内径 a、外径 b は、それぞれ正の値を想定して解いたので、式(14a) が自明な解である。しかし、式(14b) は共振条件と量子条件を満たすもう一つの解の存在を示している。そのもう一つ解は ka、kb が負である。a と b は球の半径と考えているので、正の値を取るものとすると、k が負の値を持つ必要がある。その意味は、波数 k が正のときを外向きの球面波とすれば、波数 k が負のときは、内向きの球面波と考えることができる。また $k=\omega c$ の関係から、ω の値も負の値となるが、時間的位相の回転の向きが逆向き（左巻き／右巻き）であると考えればよい。

自明な解を $k=k_1$、$\omega=\omega_1$、$a=a_1$、$b=b_1$（ただし k_1, ω_1, a_1, b_1 は正の値で、$a_1<b_1$）とすると、球面定在波を表す波動は式(15) で表される。

$$\varphi(r,t) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \exp\{i(\omega_1 t - k_1 r)\}[u_r(a_1) - u_r(b_1)] \tag{15}$$

このとき、もう一つの解は、$k=-k_1$、$\omega=-\omega_1$、$a=b_1$、$b=a_1$ となる。その球面定在波の波動を $\varphi^{(-)}(r,t)$ とすれば、内径と外径の立場が入れ替わるので単位ステップ関数の符号に注意し、式(16) のように導かれる。

$$\begin{aligned} \varphi^{(-)}(r,t) &= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \exp\{i(-\omega_1 t + k_1 r)\}[u_r(b_1) - u_r(a_1)] \\ &= -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} e^{-i(\omega_1 t - k_1 t)}[u_r(a_1) - u_r(b_1)] \\ &= -\varphi^*(r,t) \end{aligned} \tag{16}$$

このことは、自明な解を $\varphi(r,t)$ としたとき、それと共役な波動にマイナス符号をつけた $-\varphi^*(r,t)$ も解となることを示している。これは何を意味するのであろうか。

一般に空間反転(P) と時間反転(T) を同時に施すことと、荷電共役変換(C) を施すことは同値であり、$PT=C$ の関係が知られている [3]。

$$PT\varphi(r,t) = \varphi(-r,-t) = -\varphi^*(r,t) \tag{17}$$

式(17) が示すように、球面定在波 $\varphi(r,t)$ と $-\varphi^*(r,t)$ は荷電共役であり、互いに反粒子の関係にあることが分かる。これらの関係を**図１**に示す。

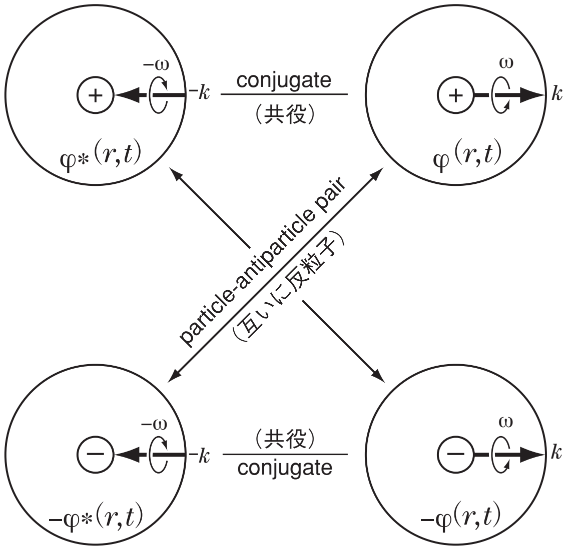

図１ 球面定在波における粒子と反粒子の関係

Fig.1. Relations between particle and anti-particle in the spherical standing wave.

３．球面定在波のエネルギー遷移

３．１　遷移後の共振条件と量子条件

球面定在波が別の状態に遷移する場合を考える。安定して存在するためには、遷移後も共振条件を満たす必要があると考えよう。つまり、遷移後の波数を k'、内径を a'、外径を b' とした場合、式(18) の関係を満たすものとする。

$$k'^2 a'b' = 1 \tag{18}$$

ここで、基底状態の波数 k に対し遷移後の波数が$1/n$ となる場合を考えよう。つまり、$k'=k/n$ となる場合である。共振条件を満たすように内径と外径が移動するが、さらなる条件として内径 a はそのまま変化しない場合を考える。その場合、共振条件を満たすように外径は b から n^2b に移動する。式(19) は遷移後の共振条件を表している。

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot a \cdot n^2 b = 1 \tag{19}$$

遷移後のエネルギーを U_n とすると式(20) で表される。

$$U_n = \frac{\hbar c\alpha}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n^2 b}\right) + \frac{\hbar c\alpha}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(n^2 b - a\right) = \frac{\hbar c\alpha}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n^2 b}\right) \tag{20}$$

これを n 状態と呼ぶことにし、さらに m 状態（$m>n$）を考える。そして m 状態から n 状態に遷移したときのエネルギー差を求めると式(21) となる。

$$U_m - U_n = \frac{\hbar c\alpha}{2b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right) \tag{21}$$

さて、この二つの状態間を遷移するときに放出されるエネルギーで新たな球面定在波が形成されるとしよう。新たに作られる球面定在波の波数 k_{mn} や角周波数 ω_{mn} も共振条件と量子条件によって定まると考える。実際にどちらが起こりえるかは別として、量子条件から二通りの場合が考えられる。式(21a) のように時間的位相一回転あたりのエネルギーが $\hbar$ で与えられるスピン 1 の場合と、式(21b) のように時間的位相半回転あたりのエネルギーが $\hbar$ で与えられるスピン1/2の場合である。

$$U_m - U_n = \hbar\omega_{mn} \tag{21a}$$

$$U_m - U_n = \hbar\frac{\omega'_{mn}}{2} \tag{21b}$$

共振条件と量子条件を満たす各状態の球面定在波のパラメータを**表 1** にまとめる。

表 1　各状態における球面定在波のパラメータ
Table 1 Parameters of the spherical standing wave in some states.

	内径 a'	外径 b'	波数 k'	エネルギー
基底 状態	a	b	k	$\frac{\hbar c\alpha}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
n 状態	a	$n^2 b$	$\frac{k}{n}$	$\frac{\hbar c\alpha}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{n^2 b}\right)$
m 状態	a	$m^2 b$	$\frac{k}{m}$	$\frac{\hbar c\alpha}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{m^2 b}\right)$
遷移 $m\rightarrow n$ スピン 1/2	$\frac{b}{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)}$	$\frac{b}{\alpha^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)}$	$\frac{\alpha}{b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	$\frac{\hbar c\alpha}{2b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$
遷移 $m\rightarrow n$ スピン 1	$\frac{2b}{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)}$	$\frac{2b}{\alpha^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)}$	$\frac{\alpha}{2b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$	$\frac{\hbar c\alpha}{2b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$

３．２　光の放出と吸収

球面定在波が、m 状態から n 状態（ただし $m>n$）に遷移したとき、差分に相当するエネルギーが放出される。光はスピンが１であることが知られているので、エネルギーが光として放出される場合の量子条件は式(22) を満たす。

$$\frac{\hbar c\alpha}{2b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\hbar\omega_{mn} \tag{22}$$

これを波長の逆数で表現すると式(23) のようになる。

$$\frac{1}{\lambda_{mn}}=\frac{\alpha}{4\pi b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 b\hbar c}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right) \tag{23}$$

ここで基底状態の外径 b をボーア半径 a_B に置き換えれば、水素原子のエネルギー準位を表す式(24) が導かれる。ここで R はリュードベリ定数を表している。

$$\frac{1}{\lambda_{mn}}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),\qquad R=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 a_B\hbar c} \tag{24}$$

m 状態から n 状態（ただし $m>n$）の遷移にともない、球面波の外径が内側に移動する。そのエネルギー差を光速 c で割った量に相当する運動量が内向きに生じると考えると、放出される光の運動量は同じ大きさで外向きになる。光の運動量 p は外向きを正として式(25) で表される。

$$p=\frac{\hbar\alpha}{2b}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right) \tag{25}$$

以上、$m>n$ としてエネルギーを放出する場合を考えてきた。光の吸収は逆のプロセスで起こる。つまり $m<n$ の場合、m 状態から n 状態に遷移するとき、差分のエネルギーが逆に吸収される。なお光の運動量を表す式(25) の符号も逆転するため、光は内向きの運動量をもつ球面波として収縮すると考えられる。光が球面波として放出され、球面波として収縮するということは、光はあらゆる経路を通る可能性を持っているということを意味する［4］。

あらゆる経路を通る可能性を持っているとはいえ、光は複素振幅を持つ波動であるため、経路同士で自己干渉を起こす。そのため、ほとんどの経路は打ち消しあい、打ち消し合わなかった経路のみが光の通過経路として認識される。

よく考えられる例として、二つのスリットを通過する経路を考える。光は二つのスリットの両方を通過し、自己干渉を起こす。しかしどちらのスリットを通ったのかを観測した場合、観測という行為自体が光の収縮と再放出というプロセス踏むと考えられるため、光の経路自体が変わっ

てしまう。このような仕組みが、光の振る舞いや光の粒子性と波動性の謎を解く鍵であると筆者は考える。

4．おわりに

球面定在波という新概念は、次のような利点がある。

(1) 中心においてエネルギーが無限大になるという点電荷にまつわる問題の解決。

(2) 質量を計算によって求めることができる。

(3) 量子力学で犠牲になっていた表象を回復することができる。

また、既存の理論との整合性も悪くなく、今後の展開が期待できるであろう。

人間の思考は平面的であるが、どうやら自然は球面を基本にしているように思われる。

謝　辞

電気の基礎を大阪大学基礎工学部電気工学科において学ぶことができたことに感謝する。人間の認知能力について同大学大学院言語文化研究科で考察することができたことに感謝する。本論文をまとめる場を与えられた帝塚山学院大学人間文化学部に感謝する。論文をまとめるにあたり内助を惜しまなかった家族に感謝する。

文　献

[1] 戸上良弘、「球面定在波の生成と自己共振に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部　研究年報　第 6 号、pp.39-51、2004.

[2] 戸上良弘、「球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部　研究年報　第 7 号、pp.143-152、2005.

[3] R.P. ファインマン /S. ワインバーグ、「素粒子と物理法則　究極の物理法則を求めて」、培風館、1990.

[4] R.P. ファインマン、「光と物質のふしぎな理論—私の量子電磁気学」、岩波書店、1987.

（2006年10月 4 日受付）