

# 球面定在波の波動関数と量子数に関する考察

## Spherical Standing Wave Functions with Quantum Numbers

戸 上 良 弘

Yoshihiro TOGAMI

### あらまし

量子効果が生じる波動現象では、本質的に振幅が複素数的になる。その複素振幅の意味について考察した。複素振幅をもつ球面波は球面定在波として捉えられることを示した。

量子効果が生じる領域において、球面定在波の内部エネルギーや共振条件から、内径・外径・波数の関係式が求められる。しかしこの関係式からは波数に關係する主量子数までしか求められない。そこで、自由空間における球面波の一般解から主量子数以外の副量子数を求め、その波動関数を示した。

キーワード：球面波、定在波、量子数、球面調和関数、球 Bessel 関数、球 Hankel 関数

### 1. はじめに

球はもっとも対称性が高く、自然界においても基本的な形状であると考えられる。筆者はこれまで球面波が定在波を作る共振条件 [1] や、内部エネルギーの計算方法 [2] などを考察してきた。前著「球面定在波のエネルギー遷移に関する考察」[3] では、基底状態の球面定在波がより高いエネルギー状態に遷移する場合を考察し、水素原子のエネルギー準位に相当する式を導いた。

球対称の波は、動径  $r$  方向の一次元の波として扱うことができる。しかしながら完全な球対称の場合のみの考察では、主量子数に相当するエネルギー準位までしか導き出せない。方位量子数などの副量子数を導くには、球の緯線方向や経線方向の振動モードを考察する必要がある。

### 2. 球面定在波とは

球面定在波は文字通り球面波であり定在波である。とくにここで主題にしている球面定在波とは、球面波の波動の存在範囲が内殻球と外殻球の球面を境界として、明確に区切られているのが特徴である。このようなモデルはマクロ的には同心球面対のコンデンサーによる共振回路 [4] を考えることができる。あるいは地球表面と上空の電離層との間に生じる共振（シューマン共振）

などをモデルとして考えることができよう。しかしながら量子効果が生じるようなミクロの世界でもこのモデルが適用できるであろうか、というのはもっともな疑問である。

## 2. 1 モデルの適応性

古典電磁気学のモデルでは、プラスの電荷が電気力線の出発点になり、マイナスの電荷が電気力線の終着点になる。電荷によって電気力線が生じると考えても、逆に電気力線の不連続点に電荷が生じると考えてもよい。同様に波動が生じたり、消滅したりするその境界に波源に相当する表面電荷を想定すれば、その波源である表面電荷と波動は一対一に対応することになる。これは平面とそれに垂直な法線が一対一に対応すること同様である。

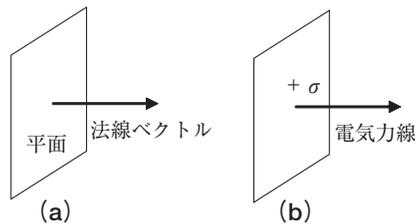


図1 (a) 平面と法線ベクトル (b) 表面電荷密度と電気力線

Fig. 1 (a) Plane and its normal vector.

(b) Surface density of charge and electrical flux line.

ところで、先端物理学のひとつである超弦理論（超ひも理論）では、振動する弦（ひも）を基本体と考えている。最近ではその弦がつながれているブレンと呼ばれる面の方にむしろ視点が移っているようである。そして、この一次元の弦と二次元の面は互いに双対性があり、どちらを主体と考えてもよいということが分かってきた [5]。このことから波動の始点の終点に、その波動と双対な境界面を想定することは、それほど不自然なことではないと考える。

## 2. 2 複素振幅の意味

式 (1) は一次元の波を表す式であり、一般に平面波を表している。位相  $\omega t - kx$  が一定となる等位相面は、時間  $t$  とともに  $x$  の正の方向に移動するため、右向き（ $x$  の正の向き）の平面波と考えられる。

$$f(x, t) = \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

$$\varphi(x, t) = e^{i(\omega t - kx)} \quad (2)$$

式 (2) は複素振幅を持つ一次元の波（平面波）である。次のように実部をとれば、式 (1) の波動と同じになる。

$$\operatorname{Re}(\varphi(x, t)) = \cos(\omega t - kx)$$

このことから実数の振幅を持つ物理現象も、複素指数関数を用いて表現されることは多い。しかし、その場合複素数を用いるのは単なる計算上の便宜である。実数振幅の波動現象を便宜上複素振幅で表すことと、もともと振幅が複素数的である波動現象とでは、本質的な違いがある。

式 (2) のような複素振幅を持つ波動は、式 (3) のように時間変数  $t$  と空間変数  $x$  を変数分離して考えることができる。

$$\varphi(x, t) = e^{i(\omega t - kx)} = e^{i\omega t} e^{-ikx} \quad (3)$$

位置に依存する振幅  $e^{-ikx}$  は時間変数を含まないことから考えて、この波動は空間的に定在波とみなすことができる。式 (3) の右辺は次のように変形でき、

$$e^{i\omega t} e^{-ikx} = e^{i\omega t} (\cos kx - i \sin kx)$$

さらに、虚数定数を時間的位相のずれと考えれば次のように変形できる。

$$e^{i\omega t} (\cos kx - i \sin kx) = e^{i\omega t} \cos kx + e^{i(\omega t - \frac{1}{2}\pi)} \sin kx$$

よって複素振幅をもつ式 (2) の波動は、式 (4) のように表現することができる。

$$\varphi(x, t) = e^{i\omega t} \cos kx + e^{i(\omega t - \frac{1}{2}\pi)} \sin kx \quad (4)$$

この式の意味を考えて複素振幅を持つ波動を模式化したものが図 2 である。空間的に定在波が、時間的な位相空間内で回転しているイメージで捉えることができる。

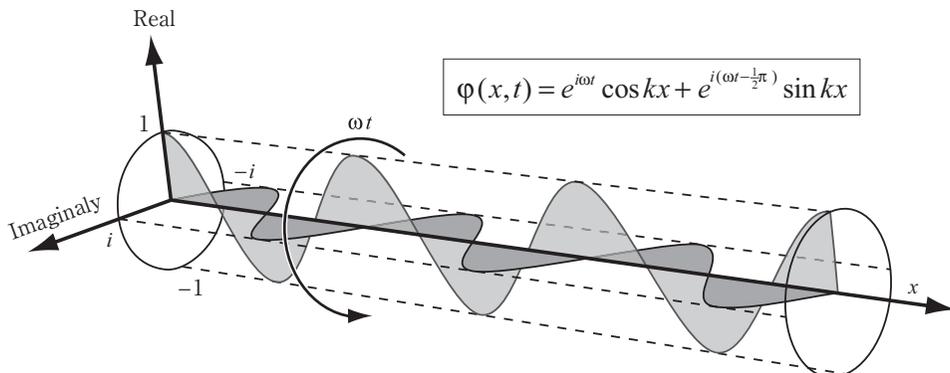


図 2 複素振幅をもつ平面波

Fig. 2 Plane wave with complex amplitude.

この図2から分かるように複素振幅を持つ波動は、その場で位相が回転しているだけで空間的（この場合  $x$  方向）には移動していない。それゆえ定在波とみなすことができるのである。ではなぜ実数部分だけを取り出した場合、式 (1) のように一方向に移動する波動のように見えるのであろうか。

その理由は例えば次のように考えることができる。複素振幅は、振幅の方向に  $1, -i, -1, i$  の4つの方向がある。時間的位相  $\omega t$  によってその振幅の山（ピーク）はその場で  $x$  軸を回転軸として回転する。そして位相4分の1回転ごとに、4状態が順番に実軸正の方向に現れる。ところでこの4状態の振幅の山（ピーク）はちょうど4分の1波長ずつ空間的にずれて配置されている。そのため位相が回転したときにその4状態が4分の1波長ずつずれながら順番に現れて、一回転したときにあたかも山一つ分（一波長分） $x$  方向に移動したように見えるからである。

例えて言えば、電光掲示板の動く文字列とそれを映し出す発光体の関係に似ている。電光掲示板の発光体それ自体はもちろん移動してはいない。文字を構成する発光体の一つひとつの ON・OFF の順番だけで、映し出す文字が移動しているように見せているのである。

ここでは話を簡単にするため平面波で考えた。球面波の場合も同様のことが言える。つまり複素振幅を持つ球面波は、本質的に定在波であると考えられるのである。その実部を取り出して実数振幅として見た場合に、内向きの球面波、または外向きの球面波に見えるということである。

ギターの弦の振動のように実数振幅のみで表現される定在波の場合、振幅が弦の位置によって異なる。つまり振幅の大きい腹や振幅の小さい節が生じ、それが振動の境界条件になる。しかし、例えば式 (2) の波動のように本質的に振幅が複素数になる波動の場合、振幅の大きさ（絶対値）は時間や位置などの位相によらず一定である。このことはある区間で区切った区間存在波動を考えた場合、その境界面は位相による位置依存性は原則として生じないということである。この考え方は球面定在波の内径と外径を、エネルギーと波数によって計算するとき有用である。

複素振幅の意味としては、実数部分を圧力のポテンシャルと考えれば、虚数部分は流れのポテンシャルと考えることができる。波動を電氣的なものと考えた場合、境界面では電圧のポテンシャルに対応する電荷と電流のポテンシャルに対応する電流荷がそれぞれ複素的に生じることになる [2]。

### 3. 球面定在波の量子数

基底状態における球面定在波の内径  $a$  と外径  $b$  と波数  $k$  の関係は、共振条件から式 (5a) の関係がある [2]。

$$k^2 ab = 1 \quad (5a)$$

共振周波数が  $n$  分周される場合を考えよう。つまり  $n$  を正の整数として、もとの周波数の  $1/n$  になる場合である。遷移後も共振条件を保つとすれば、次の式 (5b) が成り立つ。なお、 $k_n$ 、 $a_n$ 、 $b_n$  はそれぞれ遷移後の波数、内径、外径である。

$$k_n^2 a_n b_n = 1 \quad (5b)$$

周波数が  $n$  分周されるので波数  $k_n$  も  $k/n$  となる。内径  $a_n$  は  $a$  のまま変わらない場合、共振条件を保つために外径は  $n^2$  倍に広がり  $b_n = n^2 b$  となる。図 3 は、遷移前後の内径・外径・波数の関係を示したイメージ図である。なお分周を表す  $n$  は 1, 2, 3... の自然数を取り、球面定在波の状態を表す主量子数を意味するものと考えることができる。

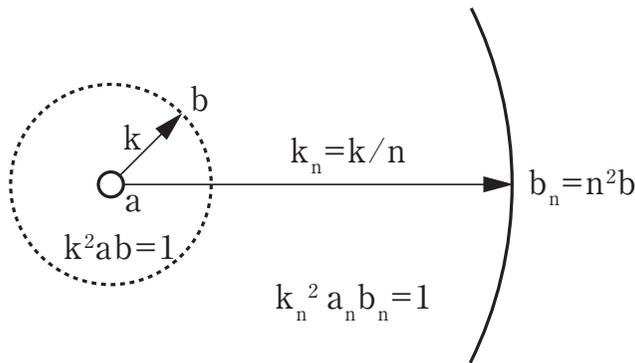


図 3 遷移と主量子数

Fig. 3 Transition and main quantum number.

#### 4. 自由空間の球面波と副量子数

一般に波動方程式は速度  $c$  を定数として次のように表される。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi$$

また波数  $k$  を用いれば式 (6) で表される。

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (6)$$

さて、ここで球座標系を用い、強制場のない自由空間における球面波を考えよう。球座標は動径方向の  $r$  と 2 種類の偏角  $\theta$  と  $\phi$  とで表される。この偏角は図 4 のように地球儀のような球をイメージした場合、北極 ( $\theta = 0$ ) から南極 ( $\theta = \pi$ ) へ至る経線方向の偏角が  $\theta$ 、赤道方向に一周する緯線方向の偏角が  $\phi$  である。

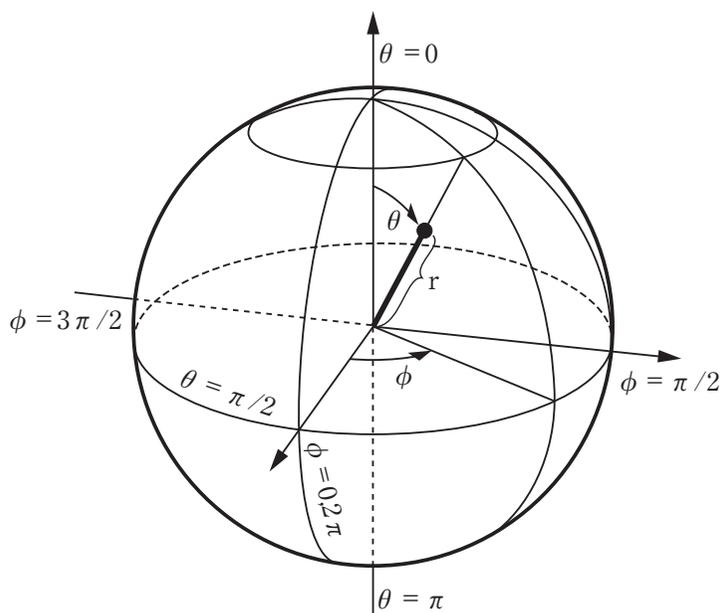


図4 球座標

Fig. 4 Spherical coordinate.

動径  $r$  方向の変数だけを含む動径関数  $R(r)$  と、球の偏角  $\theta$  と  $\phi$  の変数を含む関数に分け、式 (7) のように変数分離して考える。

$$\Phi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (7)$$

偏角方向  $\theta$  と  $\phi$  に関しては球面調和関数  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  で表されることが知られている [6]。ここで  $l$  と  $m$  は次数と呼ばれるパラメータである。 $m$  は変数  $\phi$  のみに関係し、 $l$  は変数  $\theta$  と変数  $r$  の両方に関係する。つまり  $l$  は動径関数と球面調和関数をつなぐパラメータである。

動径関数  $R_{n,l}(r)$  はパラメータ  $n$  と  $l$  に関係するが、 $n$  に関する依存性は次節で考察することにし、ここでは基底状態の  $n=1$  の場合を考える。 $R_{1,l}(r)$  が満たす微分方程式は、式 (8) のように表される。

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{1,l}(r) = 0 \quad (8)$$

ここで  $R_{1,l}(r) = u_l(r) / \sqrt{r}$  とし、さらに  $x = kr$  とおくと、 $u(x)$  は次数が半奇数  $(l+1/2)$  の Bessel (ベッセル) の微分方程式を満たすことが知られている [7]。2種類の独立な解は、狭義の Bessel 関数  $J_l(x)$  と、Neumann (ノイマン) 関数  $Y_l(x)$  を用いて式 (9) で表される。 $j_l(x)$

は第1種球 Bessel 関数、 $n_l(x)$  は第2種球 Bessel 関数または球 Neumann 関数と呼ばれるものである [8]。

$$\begin{aligned} j_l(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \\ n_l(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x) \end{aligned} \quad (9)$$

ゆえに  $R_{1,l}(r)$  は独立な解  $j_l(kr)$ 、 $n_l(kr)$  の組み合わせ（一次結合）で表される。 $l$  は 0 または正の整数をとる。 $l=0$  のときと  $l=1$  のときを式 (10) に示す。

$$\begin{aligned} j_0(kr) &= \frac{1}{kr} \sin kr, & n_0(kr) &= -\frac{1}{kr} \cos kr \\ j_1(kr) &= \frac{1}{kr} \left( \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right), & n_1(kr) &= -\frac{1}{kr} \left( \frac{\cos kr}{kr} + \sin kr \right) \end{aligned} \quad (10)$$

さて、ここで求める球面波は振幅が複素数であるという条件がつく。そこで求める球面定在波の動径関数の固有関数として式 (11) を採用することにする。

$$\begin{cases} h_l^{(1)}(kr) = j_l(kr) + i n_l(kr) \\ h_l^{(2)}(kr) = j_l(kr) - i n_l(kr) \end{cases} \quad (11)$$

なお、 $h_l^{(1)}(x)$  は第1種球 Hankel (ハンケル) 関数と呼ばれ、 $h_l^{(2)}(x)$  は第2種球 Hankel 関数と呼ばれるものである。また両者を合わせて第3種球 Bessel 関数とも呼ばれる [8]。

これらを用い、動径方向の変数  $r$  に関する互いに共役な解の組は式 (12) で表される。

$$\begin{cases} R_{1,l}(r) = h_l^{(1)}(kr) \\ R_{1,l}^*(r) = h_l^{(2)}(kr) \end{cases} \quad (12)$$

とくに、次数  $l=0$  の場合を具体的に示すと、式 (13) のようになる。時間因子を  $\exp(i\omega t)$  とすれば、それぞれ、複素振幅を有する内向きの球面波と外向きの球面波であることが分かる。

$$\begin{cases} R_{1,0}(r) = -i \frac{e^{ikr}}{kr} \\ R_{1,0}^*(r) = i \frac{e^{-ikr}}{kr} \end{cases} \quad (13)$$

この式 (13) が表す波動の模式図を図 5 に示す。

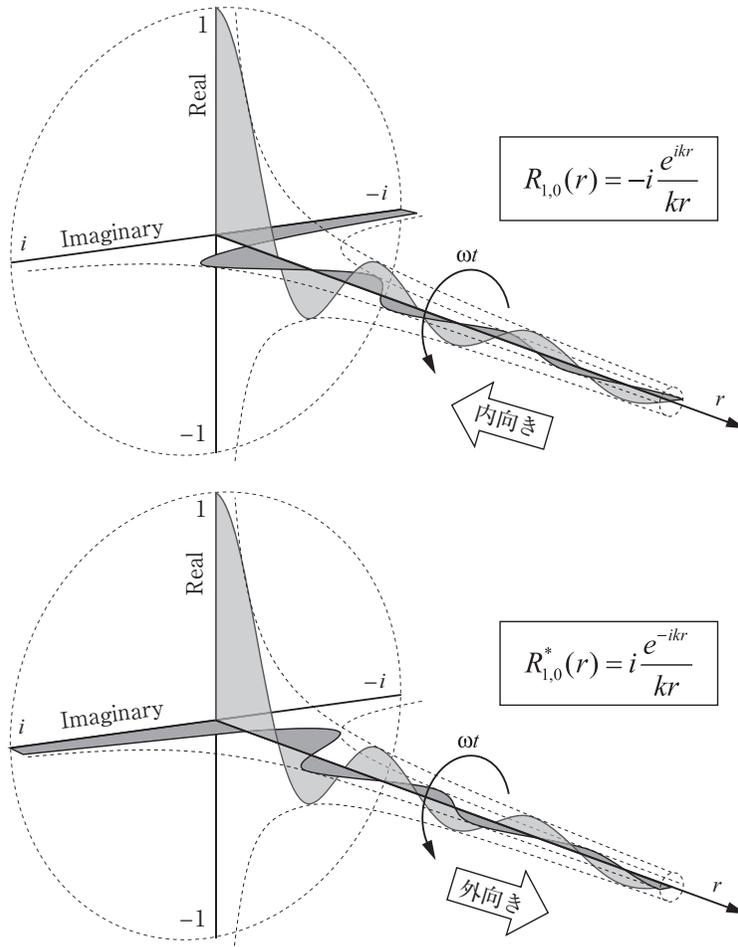


図5 複素振幅を有する球面波  
Fig. 5 Spherical wave with complex amplitude.

### 5. 球面定在波の波動関数

前節では、基底状態における球面定在波、すなわち  $n=1$  の場合のみを考えた。基底状態の波数を  $k$  とすると  $n$  分周した波数  $k_n$  は、 $k_n=k/n$  となる。動径  $r$  方向の関数  $R(r)$  は、主量子数  $n$  と副量子数  $l$  の両方に依存し、互いに共役な解は式 (14) で与えられる。

$$\begin{cases} R_{n,l}(r) = h_l^{(1)}\left(\frac{k}{n}r\right) \\ R_{n,l}^*(r) = h_l^{(2)}\left(\frac{k}{n}r\right) \end{cases} \quad (14)$$

動径波動関数  $R_{n,l}(r)$  の主量子数  $n$  依存性を図6に、方位量子数  $l$  依存性を図7に示す。

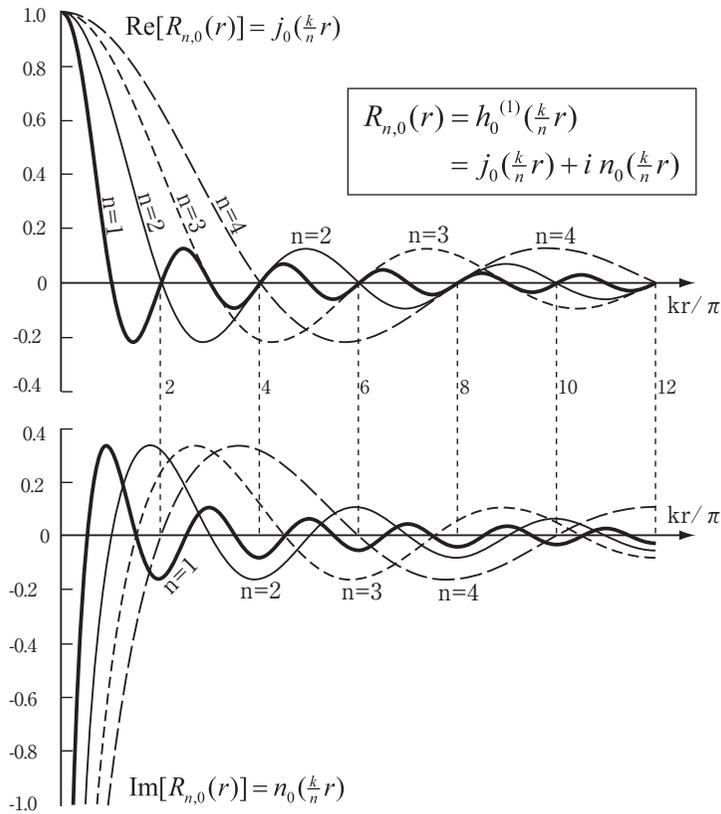


図6 動径波動関数の主量子数  $n$  依存性

Fig. 6 Radial wave functions depending on main quantum number.

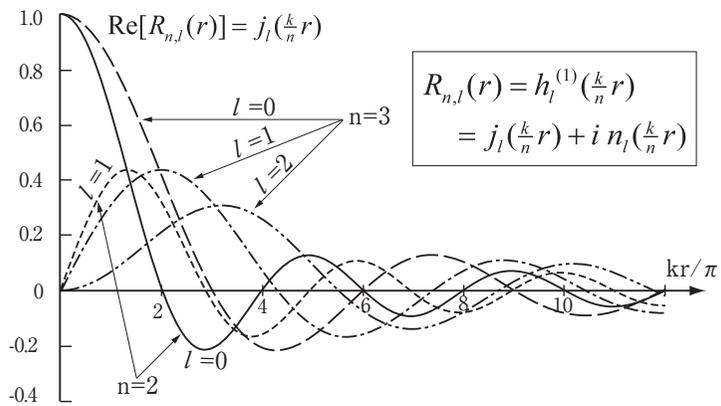


図7 動径波動関数の方位量子数  $l$  依存性

Fig. 7 Radial wave functions depending on azimuthal quantum number.

以上の考察より、動径方向の関数と球面調関数から球面定在波の各モードに固有な波動関数は式(15)で与えられる。なお、互いに共役な解は、それぞれ内向きの球面波と外向きの球面波に相当している。これらは2つの状態しか取らない下向きのスピンと上向きのスピンにそれぞれ相当していると考えられる。

$$\begin{cases} \Phi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi) = h_l^{(1)}\left(\frac{k}{n}r\right) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi) \\ \Phi_{n,l,m}^*(r, \theta, \phi) = R_{n,l}^*(r) \cdot Y_{l,m}^*(\theta, \phi) = h_l^{(2)}\left(\frac{k}{n}r\right) \cdot Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \end{cases} \quad (15)$$

表1に主な量子数に対する規格化した波動関数を示す。ただし、振幅の定数倍である振幅係数や定在波の存在区間である内径と外径は、エネルギーの計算から別に求める必要があるため、ここでは示していない。パラメータ  $k$  は、主量子数  $n=1$  のとき、すなわち球面定在波の基底状態における波数である。

表1 球面定在波の量子数と波動関数

Table. 1 Spherical standing wave functions with quantum numbers.

$n$	$l$	$m$	$\Phi_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$	$\Phi_{n,l,m}^*(r, \theta, \phi)$
1	0	0	$\Phi_{1,0,0} = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{ikr}}{kr}$	$\Phi_{1,0,0}^* = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ikr}}{kr}$
2	0	0	$\Phi_{2,0,0} = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{1}{2}ikr}}{kr}$	$\Phi_{2,0,0}^* = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}ikr}}{kr}$
		0	$\Phi_{2,1,0} = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} \left( \frac{1}{kr} + \frac{2i}{k^2r^2} \right) \cos\theta \cdot e^{\frac{1}{2}ikr}$	$\Phi_{2,1,0}^* = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} \left( \frac{1}{kr} - \frac{2i}{k^2r^2} \right) \cos\theta \cdot e^{-\frac{1}{2}ikr}$
	1	1	$\Phi_{2,1,1} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{1}{kr} + \frac{2i}{k^2r^2} \right) \sin\theta \cdot e^{i(\frac{1}{2}kr+\phi)}$	$\Phi_{2,1,1}^* = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{1}{kr} - \frac{2i}{k^2r^2} \right) \sin\theta \cdot e^{-i(\frac{1}{2}kr+\phi)}$
		-1	$\Phi_{2,1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{1}{kr} + \frac{2i}{k^2r^2} \right) \sin\theta \cdot e^{i(\frac{1}{2}kr-\phi)}$	$\Phi_{2,1,-1}^* = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{1}{kr} - \frac{2i}{k^2r^2} \right) \sin\theta \cdot e^{-i(\frac{1}{2}kr-\phi)}$

## 6. まとめ

球面定在波の波動関数を主量子数と副量子数について求めた。これらはそれぞれ、主量子数  $n$ 、軌道量子数  $l$ 、磁気量子数  $m$ 、スピン量子数に対応している。スピン量子数は、球面波の内向きと外向きの2状態に相当し、互いに共役な波動となる。

シュレーディンガー方程式で解かれる、すでによく知られている水素原子の波動関数と本稿の球面定在波のモデルの関係は次のように考えられる。偏角  $\theta$ 、 $\phi$  に関しては、どちらも球面調和

関数で表されるため、全く同等である。動径方向  $r$  に関して、両者のモデルは大きく異なる。既存の水素原子のモデルでは、静的なクーロンポテンシャルを仮定しているため  $r$  方向に関してはラゲール多項式で表される。球面定在波のモデルは、中心に静的なクーロンポテンシャルを仮定してはいない。自由空間における球面波として解き、動径方向  $r$  に関しては球 Bessel 関数で記述される。ただし振幅が複素数である必要性から、第 3 種球 Bessel 関数とも呼ばれる球 Hankel 関数を用いた。

自由空間における球面波は、朝永振一郎博士の量子力学Ⅱに詳しく記述されている [6]。またド・ブロイ波とシュレーディンガー方程式の基本的な考え方の違いも同書に明確に述べられているので参照されたい。本稿の考え方は、どちらかといえば、ド・ブロイ波の考え方に近い。しかし球面定在波のモデルは、中心から無限遠までを連続的に記述する全く自由な波動というわけではない。自己共振による内部エネルギーによって自ら定める境界条件が存在する。その境界条件である内径と外径の間にはのみ波動が存在することが大きな特徴であることはすでに述べた通りである。

#### 謝辞

電気の基礎を大阪大学基礎工学部電気工学科（現在は電子物理科学科）および同大学院において学ぶことができたことに感謝する。人間の認知能力について同大学大学院言語文化研究科で考察することができたことに感謝する。本論文をまとめる場を与えられた帝塚山学院大学人間文化学部へ感謝する。論文をまとめるにあたり内助を惜しまなかった家族に感謝する。

#### 文献

- [1] 戸上良弘、「球面定在波の生成と自己共振に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 6 号、pp.39-51、2004.
- [2] 戸上良弘、「球面定在波の内部エネルギー構造に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 7 号、pp.143-152、2005.
- [3] 戸上良弘、「球面定在波のエネルギー遷移に関する考察」、帝塚山学院大学・人間文化学部 研究年報 第 8 号、pp.121-129、2006.
- [4] 戸上良弘、「同心球面対における共振回路」、帝塚山学院短期大学 研究年報46、pp.62-74、1998.
- [5] 橋本幸士、「D プレーン 超弦理論の高次元物体が描く世界像」、東京大学出版会、2006.
- [6] 朝永振一郎、「量子力学Ⅱ（第 2 版）」、みすず書房
- [7] 蓬田 清、「演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門」、共立出版
- [8] 森口繁一・宇田川銚久・一松信、「岩波 数学公式Ⅲ 特殊関数」、岩波書店

(2007年10月4日受付)